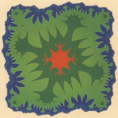
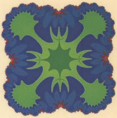
Hans Lauwerier

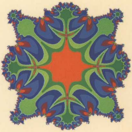


geheel herzien

FRACTALS



Meetkundige figuren



f 25.-

in eindeloze herhaling

Aramith Uitgevers

A

Fractals

HANS LAUWERIER

Fractals

MEETKUNDIGE FIGUREN IN EINDELOZE HERHALING

ARAMITH UITGEVERS BLOEMENDAAL

© 1987 H. A. Lauwerier
1e druk september 1987
2e druk november 1987
3e druk augustus 1988
4e druk oktober 1989
5e druk september 1992

Omslagontwerp: Hard Werken Design
Typografische vormgeving: Marjo Starink / Studio Cursief
Zetwerk: Ten Brink Meppel / Zetcentrale Meppel bv
Druk: Ten Brink Meppel
Alle rechten voorbehouden

CIP-gegevens Koninklijke Bibliotheek, Den Haag

Lauwerier, Hans

Fractals. Meetkundige figuren in eindeloze herhaling. Hans Lauwerier
Bloemendaal, Aramith
Met illustraties
1e druk: Amsterdam, Aramith, 1987
ISBN 90 6834 115 4
NUGI 819
Trefwoord: fractals

Voorwoord 7

Inleiding 9

1 Tellen en talstelsels *13*
2 Getallen en punten *24*
3 Kronkels en fractals *34*
4 Spiralen, bomen en sterren *50*
5 De analyse van een fractal *67*
6 Toeval in de fractal *83*
7 Poincaré, Julia, Mandelbrot *99*
8 Fractals zelf maken *124*

Appendix
A Complexe getallen *139*
B Programma's *145*

Illustratieverantwoording 157

Literatuur 159

Dit boek is geschreven voor een breed publiek, voor een ieder die geïnteresseerd is in fractals: grafisch ontwerper, computerfanaat, wiskundige, natuurfilosoof, enzovoort, in willekeurige volgorde. Ieder zal er wel iets van zijn of haar gading in vinden. Het is geen boek om van begin tot eind door te lezen of door te kijken, het is een boek om mee bezig te zijn.
Wie een beetje handig is met een microcomputer, zou best met het laatste hoofdstuk kunnen beginnen, een of meer van de daar vermelde programma's navolgen en dan in de eerdere hoofdstukken datgene opzoeken wat nodig is om de zichtbaar gemaakte fractals te begrijpen.
Ook zonder computer valt er veel te genieten, maar dan kan men beter bij het eerste hoofdstuk beginnen.

Voorwoord herziene druk

De belangrijkste wijzigingen in deze druk betreffen de programma's welke nu aangepast zijn aan de moderne eisen van MS-DOS. De programma's zijn herschreven in QBasic, de bij MS-DOS 5.0 behorende nieuwe standaard, waardoor ze meer gestructureerd en beter leesbaar zijn. Bovendien kunnen de programma's in deze vorm zonder meer gebruikt worden in compiler-versies van Basic als Turbo-Basic, Power-Basic en Quick-Basic. In enkele programma's zijn verbeteringen aangebracht. Bij de meeste programma's is het gebruik van kleuren onnodig, maar op een enkele plaats is een voorbeeld van doelmatig kleurengebruik gegeven. Enkele illustraties zijn verbeterd of vervangen door andere.

Amsterdam, september 1992
Hans Lauwerier

Een fractal is een meetkundige figuur waarin een zelfde motief zich op steeds kleinere schaal herhaalt. Eens wiskundige curiositeiten, staan fractals nu sterk in de belangstelling. Peetvader is de Frans-Amerikaanse wiskundige Benoit B. Mandelbrot. Zijn boek *The fractal geometry of nature* bevat veel illustraties waarvan een groot deel met behulp van een computer tot stand is gekomen.
Tegenwoordig beschikken eenvoudige microcomputers al over goede grafische mogelijkheden. Daarmee kunnen vele door Mandelbrot en anderen beschreven fractals op het beeldscherm te voorschijn worden getoverd. In dit boek gaan we er uitvoerig op in. Wie beschikt over een moderne MS-DOS computer met MS-DOS 5.0 als besturingssysteem, kan meteen aan de slag met de in appendix B opgenomen computerprogramma's.
Voor de meeste in dit boek vermelde programma's zijn geen kleuren nodig. In een enkel programma als JULIAP wordt getoond hoe kleuren op een functionele wijze gebruikt kunnen worden.
Een monochroom beeldscherm met hoge resolutie (640 × 480 pixels) is belangrijker dan een kleurenscherm met lage resolutie. Uiteraard kunnen met kleuren fantastische resultaten worden bereikt. In een recent boek, *The beauty of fractals*, laten de auteurs Peitgen en Richter zien tot welke spectaculaire resultaten het werken met kleuren kan leiden. Dat neemt echter niet weg dat we met bescheidener middelen bijna alles kunnen navolgen.

Niet zozeer een enkele afbeelding, maar het zien ontstaan van een fractal op het beeldscherm van de computer heeft een grote charme. Het is als het zelf musiceren zonder over de technische kwaliteiten van een concertmusicus te beschikken. Toch is het niet de bedoeling dat de lezer of gebruiker van dit boek zich beperkt tot het werken met een computer. Met het bestuderen van de diverse hoofdstukken kan hij zich ook inzicht verschaffen in de meetkundige structuur van de fractals. Daartoe is zoveel achtergrondinformatie opgenomen, dat ook lezers zonder computer ruimschoots aan hun trekken kunnen komen.
Die achtergrondinformatie bevat een beetje wiskunde, niet meer dan nodig is om de wiskundige structuur van een fractal te kunnen doorgronden. Maar natuurlijk kan men ook zonder wiskunde van fractals genieten en zou men ze kunnen zien als mysterieuze objecten van 'computer art'. Het hangt slechts van de voorkennis en studiezin van de lezer af in hoeverre hij zich kan en wil verdiepen

in de achterliggende wiskunde. Een aantal meer wiskundige passages zou zonder bezwaar bij eerste lezing overgeslagen kunnen worden. Wie praktisch is ingesteld zou bij voorbeeld kunnen beginnen met de hoofdstukken 3 en 4, gevolgd door hoofdstuk 7. Wie met een computer wil experimenteren moet vooral hoofdstuk 8 doornemen.

Fractals zijn gekenmerkt door een soort ingebouwde zelfgelijkvormigheid waarbij een figuur, het motief, zich op steeds kleinere schaal blijft herhalen. Een goed voorbeeld is een boom met een stam die zich vertakt in twee kleinere zijtakken, die zich op hun beurt weer vertakken in twee nog kleinere zijtakken, enzovoort. In gedachten kunnen we dat proces oneindig vaak voortzetten. Het uiteindelijke resultaat is een boomfractal met oneindig veel takken. Elk individueel takje, hoe klein ook, kan daarin weer worden opgevat als een stammetje dat een complete boom draagt. Deze constructie heeft veel te maken met het tweetallig talstelsel. Dat is dan ook de reden dat we dit boek beginnen met een hoofdstuk over talstelsels.
Wie de computerprogramma's bestudeert zal merken dat hier en daar een natuurlijk getal, een rangnummer, in een zeker talstelsel wordt genoteerd. Dit komt met name voor in de programma's van het type KRONKEL en STER. In het eerste hoofdstuk is alles samengevat wat we van talstelsels moeten weten.

In het tweede hoofdstuk komt een aantal fundamentele wiskundige begrippen aan de orde die van belang zijn voor het diepere inzicht in de aard van de fractals. Wie echter meer geïnteresseerd is in concrete voorbeelden dan in algemene theorie kan zich daar beperken tot de puntverzameling van Cantor. Die puntverzameling is niet alleen de oudste fractal (zo'n honderd jaar oud), maar blijkt nu een essentieel ingrediënt te zijn van veel moderne fractals.

De hoofdstukken 3 en 4 bevatten veel voorbeelden van fractals. Telkens terugkerende thema's zijn het op steeds kleinere schaal herhaalde motief, de boomstructuur en de meetkundige gelijkvormigheid. In het vierde hoofdstuk laten we zien hoe een herhaalde gelijkvormigheidstransformatie, een combinatie van een rotatie en een schaalverandering, tot spiraalvormen leidt. En inderdaad, veel fractals blijken vol spiralen te zitten. Iets dat trouwens ook opgaat voor de ons omringende wereld, van schelp tot spiraalnevel.

Wanneer we een fractal definiëren als een figuur met een tot in het oneindig kleine doorlopende zelfgelijkvormigheid, dan is de spiraal, of beter de logaritmische spiraal, te beschouwen als een soort oerfractal waaruit veel ingewikkelde fractals kunnen worden opgebouwd. De oorspronkelijk door Mandelbrot gegeven definitie is beperkter en niet goed hanteerbaar, omdat daarin gebruik wordt gemaakt van de moeilijk te berekenen 'gebroken dimensie', een wiskundig begrip waaraan we in hoofdstuk 5 enige aandacht wijden.

Dit begrip heeft overigens wel geleid tot de benaming fractal (het Latijnse *fractus* betekent gebroken). In dit boek leggen we liever de nadruk op de meetkundige zelfgelijkvormigheid. Het hebben van een gebroken dimensie zien we als een bijkomstigheid. Het vijfde hoofdstuk gaat dan ook vooral over de meetkundige aspecten van fractals en over hun symmetrieën en gelijkvormigheden. Een en ander geeft aanleiding tot een uitgebreide klasse van uit losse punten opgebouwde fractals, zogenaamde stofwolken. Deze zijn opgebouwd volgens het principe van een twee- of meertallige boom en onderworpen aan een tot in het oneindige doorlopende reeks van gelijkvormigheidstransformaties.
Hoofdstuk 5 bevat ook een bespreking van de backtrack-methode, een weinig geheugenruimte vereisende techniek om programma's met een boomstructuur efficiënt uit te voeren.

Het begrip fractal heeft al in veel toepassingsgebieden zijn nut bewezen. Daarbij is er vaak behoefte aan het begrip zelfgelijkvormigheid enigszins uit te breiden door in de reeks gelijkvormigheidstransformaties kleine veranderingen, zogenaamde storingen, aan te brengen. Wanneer we in een op wiskundig regelmatige wijze gevormde boomfractal toevallige storingen aanbrengen, kan iets ontstaan dat op een echte boom, koraal of spons lijkt.
In hoofdstuk 6 laten we zien hoe het toeval in de wiskundige modelvorming kan worden betrokken. De computer is een ideaal instrument om dergelijke zogenaamde stochastische fractals te vormen. In de filmindustrie wordt deze mogelijkheid onder andere gebruikt bij het ontwerpen van denkbeeldige landschappen in science fiction films. Men hoeft maar te denken aan de zelfgelijkvormige structuur van het maanoppervlak met kraters van allerlei afmetingen. In dit hoofdstuk wordt veel aandacht besteed aan de manier waarop de computer het toeval imiteert, het begrip deterministische chaos. Dat begrip lichten we toe aan de hand van een eenvoudig wiskundig model. Dat model beschrijft onder andere de geremde groei van opeenvolgende generaties insekten. Juist door zijn eenvoud staat het sterk in de belangstelling bij wiskundigen en natuurkundigen. Nog vrij kort geleden gaf het de natuurkundige Mitchell Feigenbaum aanleiding tot de ontdekking van een natuurwet, een soort universele gelijkvormigheid met een schalingsconstante die nu het getal van Feigenbaum wordt genoemd.

Hoofdstuk 7 brengt ons midden in het actuele onderzoeksgebied van de fractals waaraan de namen Poincaré, Julia en Mandelbrot verbonden zijn. Het trefwoord is een dynamisch systeem. Zo'n systeem is een model voor de beweging van materie in een krachtveld, niet alleen planeten en kometen in ons zonnestelsel, maar ook de wisselwerking van elementaire deeltjes in een opslagring. Een dynamisch systeem manifesteert zich hier als een herhaalde transformatie van een vlakke figuur en geeft aanleiding tot meetkundige patronen met een zelfgelijkvormige structuur, fractals dus.
De beschreven modellen zijn heel eenvoudig en lenen zich uitste-

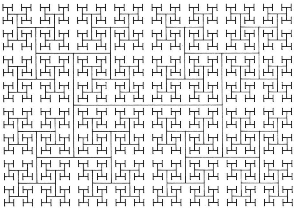
kend voor computerexperimenten. Met weinig moeite kunnen op een eenvoudige computer die experimenten worden uitgevoerd waarbij men beloond wordt met fraaie fractalfiguren. Wanneer veel krachtiger computerapparatuur ter beschikking staat, kunnen op dezelfde manier fascinerende gekleurde fractalpatronen worden gevormd als objecten voor een tentoonstelling van 'computer art'. Dit hoofdstuk gaat hier en daar vrij diep op de theoretische achtergrond in om ook de lezers die over enige wiskundige kennis beschikken, de mogelijkheid te geven die fractals niet alleen te bekijken of te maken, maar om ze ook te begrijpen.

Wie de theorie liever wil overslaan of wil uitstellen, kan meteen hoofdstuk 8 ter hand nemen dat helemaal op de praktijk is ingesteld. Het zelf ontwerpen van fractals op het beeldscherm van een microcomputer is de beste manier om fractals te leren kennen. In dit hoofdstuk ligt het accent op een paar heel eenvoudige programma's waarop veel variaties mogelijk zijn. Dit zijn programma's van het type MIRA en WOLK, dynamische systemen die in hoofdstuk 7 behandeld zijn, programma's van het type STOF betreffende in hoofdstuk 5 behandelde fractals, en ten slotte de programma's van het type STER en KRONKEL die betrekking hebben op de in de hoofdstukken 3 en 4 besproken fractals.

In het algemeen maken we in dit boek slechts een bescheiden gebruik van de wiskundige technieken. In principe is alles gericht op een doelmatig gebruik van coördinatenmeetkunde. Daarnaast nemen we aan dat de lezer ook enigszins vertrouwd is met de goniometrische functies, de exponentiële functie en de logaritmen. Daarentegen veronderstellen we dat de lezer niet of onvoldoende bekend is met de rekenwijze van de complexe getallen. Dat is wel jammer, omdat daarmee vele zaken korter en eleganter beschreven zouden kunnen worden, in het bijzonder de fractals van Julia en Mandelbrot. Voor de lezer die er wel van op de hoogte is, hebben we daar in appendix A enige aandacht aan besteed.

Tellen en talstelsels

Een *fractal* is een meetkundige figuur waarin een zelfde motief zich op steeds kleinere schaal herhaalt. Een goed voorbeeld is de H-fractal (figuur 1.1) waarin de hoofdletter H het herhalingsmotief is. De H-fractal wordt stapsgewijs opgebouwd vanuit een horizontaal lijnstuk (gelegen in het midden van figuur 1.1) waarvan de lengte als eenheid is gekozen. Bij de eerste stap worden bij de eindpunten loodrecht op dat lijnstuk twee kortere lijnstukken gezet. In figuur 1.1 is de verkorting $1/\sqrt{2}$ gekozen. Bij de tweede stap worden aan de vier eindpunten op dezelfde wijze kortere, horizontale lijnstukjes vastgehecht. Met dezelfde verkorting is de lengte daarvan dus $1/2$. Bij de derde stap komen er acht verticale lijnstukjes bij. En zo zouden we nog lang door kunnen gaan.
Figuur 1.1 eindigt na de tiende stap. Bij die stap zijn er 1024 lijnstukjes bijgekomen, elk met een lengte van $1/32$. Om praktische redenen kunnen we niet veel verder gaan. Maar niets weerhoudt ons om in gedachten het proces onbeperkt voortgezet te denken. Wat dan ontstaat is een ideale, wiskundige fractal waarin elk onderdeel, hoe klein ook, representatief is voor het geheel. Figuur 1.1 is een goede benadering voor zo'n ideale fractal, waarvoor oneindig veel stappen nodig zijn. Het is gebruikelijk om dergelijke benaderingen ook als fractal te betitelen.

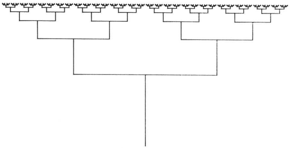


Figuur 1.1 H-fractal.

Boomstructuur

De afgebeelde H-fractal zou men kunnen interpreteren als de plattegrond van een stad, een typische woonstad, ongeschikt voor doorgaand verkeer. Zodra ergens de weg geblokkeerd is, valt de stad in twee gescheiden gedeelten uiteen. Wiskundigen spreken daarbij van enkelvoudig samenhangend. Ze noemen de H-fractal een dendriet, naar het Griekse woord *dendron* voor boom. Die benaming is heel toepasselijk want de structuur van de fractal is inderdaad die van een boom. Een stam verdeelt zich in twee zijtakken die elk weer fungeren als stam voor twee volgende kleinere zijtakken, enzovoort.

Figuur 1.2 Tweetallige boom.



In figuur 1.2 is de boomstructuur nog eenvoudiger in meetkundige vorm weergegeven. Er zijn daar, althans in gedachten, oneindig veel niveaus. Op elk niveau splitsen de verticale takken zich in tweeën met de verkortingsverhouding 1/2. Het aantal verticale takken verdubbelt zich van niveau tot niveau, terwijl tegelijkertijd de lengte wordt gehalveerd. Kennen we aan de tak op het laagste niveau, de stam, de lengte 1 toe, dan komt er in verticale zin telkens de lengte 1 bij:

$$1 \times 1 + 2 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{4} + 8 \times \frac{1}{8} + 16 \times \frac{1}{16} + \ldots$$

Wat met name in figuur 1.2 opvalt is de *zelfgelijkvormigheid*. Elk verticaal takje, hoe klein ook, is op zijn beurt telkens weer op te vatten als de stam van een complete boom, een verkleinde kopie van de gehele figuur.

Wat verder opvalt is dat de hele figuur besloten is binnen een rechthoekige driehoek, een half vierkant. Naarmate de takjes kleiner worden, komen ze ook dichter bij de bovenrand. Uit de figuur blijkt echter dat ze er telkens een taklengte vandaan blijven. We hebben hier te maken met een *limietproces* dat te vergelijken is met het sommeren van een oneindig voortlopende reeks:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = 2$$

Natuurlijk kunnen we niet een oneindig aantal optellingen uitvoeren. We moeten altijd ergens ophouden. We kunnen echter wel willekeurig dicht bij de limietwaarde 2 komen. Na bij voorbeeld 5, 10, 15 of 20 stappen vinden we:

n	benadering	verschil met limietwaarde 2
5	1.9375	0.0625
10	1.99804688	0.00195312
15	1.99993897	0.00006103
20	1.99999809	0.00000191

Weerspiegeling van een talstelsel

Dat splitsen in groepjes van twee of omgekeerd het bij elkaar nemen van groepjes van twee, is karakteristiek voor het tweetallig talstelsel, net zoals het tientallig stelsel berust op het splitsen in of het bij elkaar nemen van groepjes van tien. De fractal van figuur 1.2 is wellicht het eenvoudigste voorbeeld van een uitgebreide familie van fractals waarin zich op meetkundige wijze de structuur van een talstelsel weerspiegelt. Er is dan ook alle aanleiding om iets meer aandacht aan talstelsels te besteden. Wie zich wil bezighouden met de computerprogramma's waarmee de fractals op het beeldscherm te voorschijn geroepen kunnen worden, zal er veel mee te maken krijgen.

Getallen: naamgeving en notatie

Tellen is voor ons iets vanzelfsprekends. We staan er nauwelijks bij stil dat onze huidige wijze van tellen in woord en notatie het resultaat is van een lange cultuurhistorische ontwikkeling. De Hindoes legden er veertien eeuwen geleden de basis voor. Daarna duurde het nog eens tien eeuwen voordat Simon Stevin (1548-1620) uit Brugge de breuken invoerde.
Het lijkt allemaal zo eenvoudig. Eenheden worden in groepjes van tien bijeengenomen tot eenheden van hogere orde, tientallen. Op dezelfde manier worden tientallen samengevoegd tot honderdtallen, en die weer tot duizendtallen, enzovoort. Woorden en notatie geven (voorlopig) geen problemen:

duizend	=	1 000	=	10^3
miljoen	=	1 000 000	=	10^6
miljard	=	1 000 000 000	=	10^9
biljoen	=	1 000 000 000 000	=	10^{12}

Zoals we zien is de notatie in machten van tien korter en duidelijker, zeker wanneer het aantal nullen zes of meer is.
Helaas is het zo dat benaming en notatie soms van land tot land kun-

nen verschillen. Zo betekent in Amerika ‘a billion’ wat wij miljard noemen, dus 10^9. In de praktijk kan dit tot misverstanden aanleiding geven wanneer Amerikaanse persberichten klakkeloos worden overgenomen. Maar omdat velen toch moeite hebben zich bij een miljard of een biljoen iets voor te stellen blijft het vaak onopgemerkt. Voor wiskundigen is dat niet zo belangrijk, omdat een getal als 10^{100} door zijn notatie precies is bepaald. Het is niet nodig het nog eens met woorden (woorden schieten tekort) uit te spreken. In het tientallig stelsel kunnen we onbeperkt ook steeds kleinere eenheden definiëren: een tiende, een honderdste, een duizendste, enzovoort. Elke eenheid van welke orde dan ook, wordt verdeeld in tien kleinere eenheden van lagere orde:

een tiende	=	$\frac{1}{10}$	=	0.1	=	10^{-1}
een honderdste	=	$\frac{1}{100}$	=	0.01	=	10^{-2}
een duizendste	=	$\frac{1}{1000}$	=	0.001	=	10^{-3}
een miljoenste	=	$\frac{1}{1\,000\,000}$	=	0.000001	=	10^{-6}

Ook hier kunnen om typografische redenen notaties worden gebruikt als 1 / 100 of 10^{-2}.
De notatie van een willekeurig getal, het huidige jaartal bij voorbeeld, berust op het afsplitsen van machten van tien. We beginnen met de grootste eenheid, één duizendtal. Van wat overblijft kunnen we negen honderdtallen afhalen, daarna acht tientallen, waarna er nog zeven eenheden resteren. Dus:

$$1987 = 1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 7$$

Voor een niet geheel getal als pi, de verhouding van de omtrek van een cirkel tot de diameter, komt er een decimale breuk: π = 3.14159265358979.... En daarmee kunnen we steeds maar doorgaan. Nooit komt er een einde aan. Hoewel in de praktijk enige tientallen decimalen van pi meer dan voldoende zijn om de meest wonderlijke astronomische berekeningen uit te voeren, vormt de ontwikkeling van pi als een steeds verder gaande decimale breuk een voortdurende uitdaging. In de zestiende eeuw was de beste benadering 355/113 = 3.1415929... en in 1700 kende men al honderd decimalen. Tegenwoordig strekt de kennis zich dank zij de computer uit tot 133 miljoen decimalen!

Dat juist het tientallig stelsel zich zo sterk heeft ontwikkeld, komt natuurlijk omdat wij mensen tien vingers hebben. Het is aannemelijk dat wij in het heelal niet de enige intelligente levensvorm zijn, en dat zich elders een levensvorm heeft ontwikkeld die een ander talstelsel gebruikt, het achttallige door een octopus of zoiets.
Het tientallig stelsel heeft trouwens ook wat bezwaren. Het valt

niet mee om iets in drie precies gelijke delen te verdelen. Om 1/3 als decimale breuk te schrijven moeten we ons behelpen met benaderingen:

0.3 0.33 0.333 0.3333, enzovoort

Ook hier komen we nooit klaar, net als bij pi, maar we hebben wèl een eenvoudige regelmaat in de ontwikkeling.
Vijfduizend jaar geleden ging het beter. In Tweestromenland hadden de Soemeriërs een zestigtallig stelsel ontwikkeld, dat in de praktijk (bij voorbeeld bij landbouw en astrologie) buitengewoon goed voldeed. Wij hebben er nog onze indeling van de tijd in uren, minuten en seconden aan te danken, evenals het meten van hoeken in graden, minuten en seconden. Inderdaad, een derde uur is precies twintig minuten.
De Egyptenaren hadden daarentegen een veel primitievere getallennotatie, gebaseerd op machten van tien. Er waren aparte tekens voor 1, 10, 100, 1000, 10000 en 100000. Die werden zo vaak herhaald als maar nodig was. Dat de Grieken er moeite mee hadden blijkt uit het beroemde verhaal over Atlantis, dat Plato in zijn Kritias vermeldt. De Grieken interpreteerden de Egyptische getallen een factor 10 te groot, dus 1000 in plaats van 100. Daardoor leken de afmetingen van Atlantis zo groot dat er in de Middellandse Zee geen plaats voor was. In werkelijkheid ging het echter om een gigantische vulkaanuitbarsting die een eind maakte aan de Minoïsche beschaving op Kreta.
Bij heel andere volken, zoals bij voorbeeld de Maya's, is het twintigtallig stelsel in zwang gekomen. Hoe het ook zij, heden ten dage is het decimale talstelsel het alles overheersende systeem.

Tweetallig stelsel

Bij problemen van wiskundige en technische aard is het soms veel handiger om in andere talstelsels te rekenen. Het allereenvoudigste talstelsel is natuurlijk het tweetallige. Daarbij moeten we telkens groepjes van twee vormen. Beperken we ons voorlopig tot de natuurlijke getallen (0, 1, 2, 3, ...) dan gaat dat als volgt:

tientallig	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
tweetallig	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010

We gebruiken dus alleen de cijfers 0 en 1. Met de tweetallige notatie 110100111 bedoelen we dus:

$$\begin{aligned} 110100111 &= 2^8 + 2^7 + 2^5 + 2^2 + 2 + 1 = \\ &= 256 + 128 + 32 + 4 + 2 + 1 = 423 \end{aligned}$$

In het tweetallig stelsel worden de getallen ongeveer driemaal zo lang als in het decimale systeem. Dat betekent meer schrijfwerk, maar ook eenvoudiger rekenwerk. Zo zijn de tafels van vermenigvuldiging ineengeschrompeld tot:

$0 \times 0 = 0, \quad 0 \times 1 = 0,$
$1 \times 0 = 0, \quad 1 \times 1 = 1.$

Rekenmachines rekenen intern in het tweetallige stelsel. Daartoe moeten ze heel veel dezelfde eenvoudige berekeningen uitvoeren, en dat kan heel snel.

Van tientallig naar tweetallig

Om van een willekeurig natuurlijk getal de tweetallige notatie uit de tientallige af te leiden, kunnen we het beste steeds maar het getal door twee delen en de rest noteren, zoals in het volgende voorbeeld:

423 : 2 =	211	rest 1
211 : 2 =	105	rest 1
105 : 2 =	52	rest 1
52 : 2 =	26	rest 0
26 : 2 =	13	rest 0
13 : 2 =	6	rest 1
6 : 2 =	3	rest 0
3 : 2 =	1	rest 1
1 : 2 =	0	rest 1

In de rechterkolom verschijnen dan onder elkaar de van linksaf opvolgende binalen van de tweetallige notatie.

Binale breuken

Zoals we in het tientallige stelsel breuken en onmeetbare getallen kunnen schrijven als een afbrekende of een oneindig voortlopende decimale breuk, kan dat ook in het tweetallig stelsel. Zo is:

$\frac{45}{64} = 0.101101$, dat wil zeggen

$$\frac{45}{64} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64}$$

Verdubbelen of met twee vermenigvuldigen komt neer op het naar rechts verplaatsen van de decimale punt:

$$\frac{45}{32} = 1.01101$$

$\frac{45}{16}$ = 10.1101

terwijl 45 = 101101.

Probeert men een willekeurige breuk *p/q*, met *p* en *q* onderling ondeelbare natuurlijke getallen, als een binale breuk te schrijven, dan ontdekt men spoedig dat de breukontwikkeling alleen afbreekt indien *q* een macht van twee is, zoals in het bovenstaande voorbeeld. In alle andere gevallen blijkt in de breukontwikkeling hetzelfde patroon zich telkens te herhalen. Bij voorbeeld 3/7 = 0.011 011 011... of, met een kortere notatie 3/7 = 0.$\underline{011}$ waarbij het repeterende patroon is onderstreept.
Het rekenschema om de binaalontwikkeling uit te voeren, berust op het voortdurend verdubbelen van de teller van de te ontwikkelen breuk:

```
     0    1    1    0    1    1    0   ...
---------------------------------------------
3    6   12
          5   10
               3    6   12
                         5   10
                              3    6   ...
```

Zodra er bij verdubbeling van de teller een getal wordt gevonden dat groter dan of gelijk is aan de noemer (hier 7), dan trekken we de noemer ervan af, noteren boven de streep een binaal 1, en gaan weer verder met de rest. We laten het nog eens zien voor de breuk 5/11:

```
0   0   1   1   1   0   1   0   0   0   1   0   ...
-----------------------------------------------------
5  10  20
        9  18
            7  14
                3   6  12
                        1   2   4   8  16
                                        5  10   enz.
```

dus 5/11 = 0.01 110 100 01 met een repeterend patroon van tien binalen.

Eerder merkten we ten aanzien van figuur 1.2 op dat de oneindig voortlopende reeks 1 + 1/2 + 1/4 + ... de limiet 2 heeft. Datzelfde kunnen we ook schrijven als 2 = 1.111 1..., een repeterende breuk met alleen enen. Eigenlijk is dat een wat moeizame manier om het getal twee te schrijven. Wat minder vreemd is de notatie 0.100 111 1... of liever 0.100 $\underline{1}$. Ook hier kunnen we hetzelfde getal beter noteren als 0.101 of 5/8 in gewone, decimale notatie. We kunnen dus afspreken om, waar nodig, een oneindige rij van een

nul gevolgd door enen te vervangen door een enkele één op de plaats van de nul. In het tientallig stelsel hebben we een overeenkomstige situatie: $0.999\,9.. = 1$ en $0.123\,\underline{9} = 0.124$.

Viertallig en achttallig stelsel

De stap van het tweetallig naar het viertallig of achttallig stelsel is heel eenvoudig. Hij is te vergelijken met de overgang van het tientallig naar het honderdtallig stelsel. Een paar voorbeelden:

$$423 = 110\;100\;111 \qquad \text{tweetallig}$$

$$\begin{aligned} 423 &= 1\,(10)\,(10)\,(01)\,(11) && \text{viertallig} \\ &= 1 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \quad 3 && \text{viertallig} \\ &= 1\cdot 4^4 + 2\cdot 4^3 + 2\cdot 4^2 + 1\cdot 4 + 3 \\ &= 1\cdot 256 + 2\cdot 64 + 2\cdot 16 + 1\cdot 4 + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 423 &= (110)\,(100)\,(111) && \text{achttallig} \\ &= 6 \quad 4 \quad 7 && \text{achttallig} \\ &= 6\cdot 8^2 + 4\cdot 8 + 7 \\ &= 6\cdot 64 + 4\cdot 8 + 7 \end{aligned}$$

Het achttallig stelsel komt nogal eens in computerprogramma's voor. Het mist het nadeel van het tweetallig stelsel dat de getallen zo lang worden.
Omgekeerd is van achttallig stelsel naar tweetallig evenmin een probleem. We laten het ditmaal zien voor de breuk 5/13:

	3	0	4	7	
5	40				
	1	8	64		
			12	96	
				5	...

Het rekenschema geeft voor 5/13 in achttallige (octale) notatie $0.\underline{3047}$. De overstap naar het tweetallig stelsel is slechts een kwestie van notatie: 3 = 011, 0 = 000, 4 = 100, 7 = 111. Dus 5/13 wordt in het tweetallig stelsel $0.\underline{011\;000\;100\;111}$.

Drietallig stelsel

Ten slotte nog iets over het drietallig stelsel dat we later ook nodig zullen hebben. Nu is:

$$\begin{aligned} 423 &= 1\cdot 243 + 2\cdot 81 + 2\cdot 9 \\ &= 1\cdot 3^5 + 2\cdot 3^4 + 2\cdot 3^2 + 0\cdot 3 + 0 \end{aligned}$$

Dus 423 wordt in drietallige notatie 12 200.
In het drietallig stelsel worden alleen de cijfers 0, 1 en 2 gebruikt. In dit stelsel zijn de tafels van vermenigvuldiging maar iets moeilijker dan in het tweetallig stelsel:

x	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

Ook de ontwikkeling van een breuk geeft nauwelijks problemen. Bij de ontwikkeling van de breuk 3/7 (in tientallige notatie) hanteren we het reeds bekende rekenschema:

	1	0	2	...
3	9			
	2	6	18	
			2	...

Dus 3/7 wordt in het drietallig stelsel 0.$\underline{102}$.

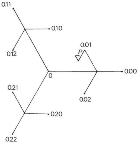
'Drietallige' boom

De boomstructuur uit figuur 1.3 is gebaseerd op het drietallig stelsel. Vanuit een punt vertrekken drie gelijke hoofdtakken onder hoeken van 120⁰. Elk van de drie uiteinden is opnieuw beginpunt van drie kleinere takken in dezelfde richtingen, en zo maar door.
De richting naar rechts geven we aan met 0, die naar links omhoog met 1, en die naar links omlaag met 2. Uitgaande van het beginpunt 0, kunnen we dan de uiteinden van de opeenvolgende takken voorzien van ternale breuken:

eerst	0.0	0.1	en 0.2	
dan	0.00	0.10	0.20	(alle volgende takken naar rechts),
	0.01	0.11	0.21	(alle volgende takken links omhoog),
	0.02	0.12	0.22	(alle volgende takken links omlaag),

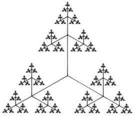
enzovoort.

Figuur 1.3 Schema van de drietallige boom.



In figuur 1.3 zijn er een paar aangegeven. Het punt *P* in die figuur correspondeert aldus met de drietallige breuk 0.01210, te lezen als rechts, (links) omhoog, (links) omlaag, (links) omhoog, rechts. Met

Figuur 1.4 *Drietallige boom.*

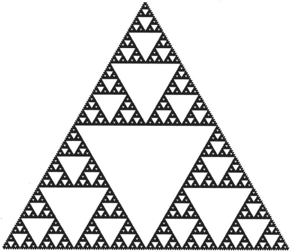


deze notatie wordt het aantal plaatsen achter de punt (of het aantal wijzergetallen) steeds van tevoren vastgelegd. Dit houdt in dat we eerder afbrekende breuken soms met één of meer extra nullen moeten aanvullen.

Met de computer In figuur 1.4 is de boom met behulp van de computer verder doorgetekend. De takken worden daar vijf keer met dezelfde factor (gekozen is 0.45) verkleind. Het totale aantal takken is dan 3^6 of 729. Het programma is onder de naam BOOM3 in appendix B opgenomen.
Wie dit programma door zijn eigen microcomputer wil laten uitvoeren, moet rekening houden met het oplossend vermogen van het beeldscherm. Daardoor worden beperkingen gesteld aan het aantal niveaus, de orde van de benadering van de ideale tot in het oneindige doorlopende fractal. In de programma's wordt de orde meestal door p aangegeven. Voor de drietallige boom van figuur 1.4 is $p = 5$.

Ook voor de eenvoudiger boom uit figuur 1.2 is een programma opgenomen. Het heet BOOM2. Daarmee zijn zeven niveaus haalbaar. Van de in figuur 1.1 afgebeelde fractal zijn twee verschillende programma's opgenomen, BOOMH1 en BOOMH2. Het eerste programma is snel en eenvoudig, maar neemt bij uitvoering nogal wat geheugenruimte in beslag. Het tweede programma vereist veel minder geheugenruimte. Het is gebaseerd op de backtrack-methode, een doeltreffende manier om de takken van een twee- of meertallige boom te nummeren. De backtrack-methode wordt besproken in hoofdstuk 5.

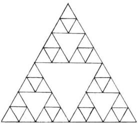
Figuur 1.6 Zeef van Sierpinski.



Zeef van Sierpinski

In 1915 heeft de Poolse wiskundige Waclaw Sierpinski (1882-1969) een aardige variant op de drietallige boom bedacht. Deze staat nu bekend als de zeef van Sierpinski. Hij wordt verkregen door uit te gaan van een massief gedachte gelijkzijdige driehoek. Die verdelen we in vier kleinere gelijkzijdige driehoeken, waarvan de middelste wordt verwijderd (figuur 1.5). Er ontstaat dan een driehoekig gat. Met de overige drie massieve gelijkzijdige driehoeken gaan we net zo te werk, zodat er drie kleinere driehoekige gaten ontstaan. In figuur 1.5 zijn we nog één stap verder gegaan, maar in gedachten kunnen we zo natuurlijk eindeloos doorgaan.
Een veel betere, met de computer vervaardigde, tekening is afgebeeld in figuur 1.6. Het programma daarvan is onder de naam SIER in appendix B opgenomen.

Figuur 1.5 Schema van de zeef van Sierpinski.



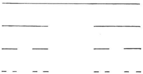
Getallen en punten

Wiskundigen hebben er altijd naar gestreefd hun redeneringen volgens strikt logische wetten te baseren op grondprincipes (axioma's) die zelf geen bewijs meer behoeven. Al zo'n twintig eeuwen geleden wisten de Grieken voor de meetkunde zo'n axiomastelsel te ontwikkelen. Een van hun leerboeken, de *Elementen* van Euclides (330-275 v.C.), heeft tot in deze eeuw binnen de wiskunde een overheersende rol gespeeld. Vooral in het onderwijs heeft het gediend als een schoolvoorbeeld van wiskundig redeneren.
De Grieken dachten sterk meetkundig. Bij een getal dachten zij aan de lengte van een lijnstuk, bij een kwadraat aan de oppervlakte van een vierkant en bij een derde macht aan de inhoud van een kubus. Aan vierde machten kwamen zij niet toe! Met onmeetbare getallen als $\sqrt{2}$ hadden zij veel moeite. Het is eigenlijk verbazingwekkend dat er pas in de vorige eeuw een wiskundig strenge theorie van het getalbegrip werd ontwikkeld waarin ook het onmeetbare getal zijn logische plaats heeft. Dat was vooral de verdienste van de Duitse wiskundige Georg Cantor (1845-1918). In dit hoofdstuk bespreken we een paar van zijn ideeën, omdat die van belang zijn voor de wiskundige achtergrond van fractals.

Cantor-fractal

Cantor is een van de grondleggers van wat we tegenwoordig verzamelingenleer noemen. Voor ons is Cantor echter vooral de bedenker van wat we de oudste fractal zouden kunnen noemen. Deze zogenaamde *puntverzameling van Cantor*, uit 1870, kan worden geconstrueerd volgens een eenvoudig principe in een eindeloze herhaling. Zoals in figuur 2.1 is aangegeven, beginnen we met een lijnstuk inclusief zijn eindpunten. Daaruit laten we het middelste derde gedeelte, zonder eindpunten, weg. We houden dan twee lijnstukken over met in totaal vier eindpunten (figuur 2.1a). Elk van die twee lijnstukken behandelen we als het oorspronkelijke lijnstuk. De middelste derde gedeelten worden dus verwijderd, zodat er in totaal vier lijnstukken met elk twee randpunten overblijven (figuur 2.1b). Zo gaan we verder. Uiteindelijk zullen er alleen maar losse punten overblijven: de puntverzameling of fractal van Cantor. Een dergelijke uit losse punten opgebouwde fractal pleegt men tegenwoordig als stof aan te duiden. In dit geval kunnen we dus spreken van cantor-stof.

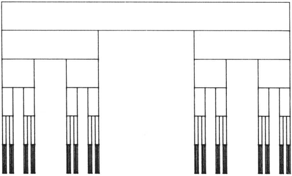
Figuur 2.1 Constructie van de fractal van Cantor.



Als we aan het oorspronkelijke lijnstuk een lengte 1 toekennen, dan zijn er na 3 stappen $2^3 = 8$ lijnstukken, elk met een lengte $3^{-3} = 1/27$ (figuur 2.1c). Na n stappen zijn er 2^n lijnstukjes, elk met een lengte 3^{-n}. De totale lengte van alle overgebleven lijnstukjes is $(2/3)^n$ en dat gaat naar nul wanneer n onbepaald toeneemt.
Wiskundigen zeggen dat de puntverzameling van Cantor de maat of dimensie nul heeft. We zullen in hoofdstuk 5 zien dat er een ander, meer praktisch gericht dimensiebegrip bestaat waarbij de cantor-verzameling de dimensiewaarde 0.6309... heeft. Dus geen geheel getal, maar een breuk, een gebroken waarde. Engelstaligen spreken daarom van 'fractal dimension', een 'gebroken dimensie'. Met de verzelfstandiging van 'fractal' werd de nieuwe term geboren.

Kam van Cantor

Het is niet eenvoudig om van de cantor-fractal een redelijke illustratie te maken. Doch met een leuk trucje kunnen we uit de verschillende fasen waarvan we er in figuur 2.1 vier hebben afgebeeld, een kamachtige structuur vormen, de kam van Cantor (figuur 2.2, verkregen met het programma KAM). Hiertoe geven we alle lijnstukjes van de verzameling van Cantor een gelijke dikte. Uiteraard krijgen we dan weer een benadering. In werkelijkheid lopen de 'tanden' van de kam naar beneden oneindig ver door.

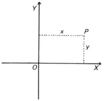


Figuur 2.2 Kam van Cantor.

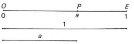
Punten als getallen, getallen als punten

In de zeventiende eeuw begonnen nieuwe opvattingen over de meetkunde post te vatten. De techniek van het rekenen was al aardig ontwikkeld en men begon er over te denken om meetkundige bewerkingen te herleiden tot rekenkundige. De pionier op dit gebied is René Descartes (1596-1650), een Frans filosoof die in dienst trad van prins Maurits en enige tijd in de Nederlanden verbleef.
Een punt kan in het platte vlak worden vastgelegd door twee (reële)

Figuur 2.3 Cartesische coördinaten.



Figuur 2.4 Getal als verhouding van lijnstukken.



getallen, de van een teken voorziene afstanden van dat punt tot twee onderling loodrechte lijnen, de coördinaat-assen. Die getallen worden cartesische coördinaten genoemd (Cartesius is de Latijnse versie van Descartes). Zoals is aangegeven in figuur 2.3, gebruiken we een horizontale coördinaat-as, de *X*-as, en een verticale coördinaat-as, de *Y*-as. Hun snijpunt *O* heet de oorsprong. De coördinaten van het punt *P* zijn in figuur 2.3 aangegeven met de letters *x* en *y*. De notatie (x,y) kan dus worden opgevat als een tweetal (reële) getallen òf als de coördinaten van een punt.
Wanneer we ons beperken tot punten van de *X*-as, dan kunnen we volstaan met de *x*-coördinaat, omdat op de *X*-as altijd $y = 0$ is. Op deze wijze hoort bij elk punt op de *X*-as een getal, de *x*-coördinaat, en omgekeerd bij elk reëel getal een punt. De *X*-as is dus een getallenlijn, een oneindig lange meetlat. We kiezen daaruit het gedeelte dat correspondeert met de getallen tussen 0 en 1, het lijnstuk *OE* waarvan *O*, de oorsprong, het linkereindpunt is, en *E* met het getal 1 overeenkomt. Als *P* het punt is dat correspondeert met het getal *a*, dan wil dit zeggen dat $OP : OE = a$ (figuur 2.4).
Alle uitspraken over getallen kunnen we op deze wijze herleiden tot overeenkomstige uitspraken over punten en omgekeerd. Zijn bij voorbeeld *P* en *Q* de beeldpunten van de getallen *a* en *b*, dan stemt het midden van het lijnstuk *PQ* overeen met het (rekenkundig) gemiddelde $(a+b)/2$ van die twee getallen.
Voor wiskundigen is dit heen en weer springen tussen rekenkundige en meetkundige begrippen een soort tweede natuur geworden. Computerprogrammeurs die grafische programma's ontwerpen, zullen ongetwijfeld dezelfde ervaring hebben. Alles wat door de computer getekend wordt, moet immers eerst door getallen in cartesische coördinaten worden vastgelegd.

De cantor-fractal rekenkundig

De constructie van de cantor-fractal kunnen we nu ook rekenkundig beschrijven. Omdat er telkens lijnstukken in drie gelijke delen worden verdeeld, is het handig om bij de rekenkundige beschrijving het drietallig talstelsel te gebruiken. Daar het getallen tussen 0 en 1 betreft, gaat het om breukontwikkelingen van de vorm:

$$a = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{9} + \frac{c_3}{27} + \frac{c_4}{81} + \ldots$$

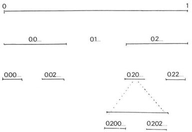
of $a = 0.c_1c_2c_3c_4\ldots$ waarbij $c_1, c_2, c_3\ldots$ de cijfers 0, 1 en 2 kunnen zijn. Zo is:

$$0.3 = \frac{3}{10} = 0.0\underline{2200}$$

$$0.5 = \frac{1}{2} = 0.\underline{1}$$

$$0.8 = \frac{4}{5} = 0.\underline{2101}$$

Met het onderstreepte gedeelte in de breukontwikkeling geven we aan dat een groepje cijfers telkens herhaald moet worden. Dat verschijnsel is kenmerkend voor de ontwikkeling van gewone, meetbare breuken, niet alleen in het drietallig stelsel, maar ook in ieder ander talstelsel.
De constructie begint met het interval [0,1] inclusief de eindpunten 0 en 1. Het middelste derde gedeelte wordt gemarkeerd door alle getallen waarvan de drietallige breukontwikkeling met een 1 begint. In de volgende stap handelen we net zo met de tweede positie achter de komma (figuur 2.5). Het komt er gewoon op neer dat we alle getallen gaan schrappen waarbij in de drietallige breukontwikkeling een cijfer 1 voorkomt.



Figuur 2.5 Fractal van Cantor en het drietallige stelsel.

Uit de voorbeelden van figuur 2.5 blijkt dat bij de eerste slag een heleboel getallen verdwijnen, bij voorbeeld het getal 0.5 in decimale notatie. Het punt 0.8 verdwijnt bij de tweede slag, want we hebben hierboven gezien dat $0.8 = 0.\underline{2101}$ (drietallig). Het getal $0.3 = 0.0\underline{2200}$ (drietallig) zal daarentegen nooit verdwijnen. De punten van de verzameling van Cantor zijn dus te identificeren met alle getallen tussen 0 en 1 die in het drietallig stelsel alleen met nullen en tweeën geschreven kunnen worden! De 0 doet natuurlijk mee, maar 1 ook omdat $1 = 0.\underline{2}$ (drietallig).

De puntverzameling van Cantor bevat nog meer bijzonderheden. Om die te kunnen bespreken moet het wiskundige begrippenapparaat wat worden uitgebreid. In de volgende passages wordt gepoogd iets van de meer fundamenteel wiskundige aspecten van fractals naar voren te brengen. We sluiten daarmee nauw aan bij de door Cantor ontwikkelde theorieën.

Soorten van oneindigheid

In gedachten verplaatsen we ons even naar een vroegere primitieve beschaving waarin de veeteelt al zover was ontwikkeld, dat rond-

trekkende nomaden grote kudden met zich mee konden voeren. Helaas beschikte men nog niet over een goed telsysteem. Laten we daarom maar aannemen dat men tot niet veel meer in staat was dan het gebruiken van handen en vingers. Toch kon men heel nauwkeurige uitspraken doen in de trant van: 'Ik bezit evenveel varkens als schapen', of: 'Ik heb evenveel koeien als mijn buurman paarden heeft.' Daartoe dreef men eenvoudig alle koeien en paarden bijeen en liet telkens een koe èn een paard tegelijk los, totdat ze allemaal aan de beurt waren geweest. In de wiskunde wordt dit heel abstract een 1-1 toevoeging van elementen van twee verzamelingen genoemd.

Terug naar de bron Twee verzamelingen heten even groot of gelijkwaardig wanneer men de elementen van de ene verzameling precies kan koppelen aan die van de andere verzameling. Zo past in ons voorbeeld bij elk paard een koe, en omgekeerd hoort bij elke koe een paard. Tegenwoordig noteren veehouders hun aantallen stuks vee gewoon in de moderne getallennotatie, maar wiskundigen zijn soms gedwongen om weer terug te keren tot de bron van de beschaving.
Wat bij voorbeeld te denken van de uitspraak: *Er zijn evenveel even als oneven getallen.* Van elke soort zijn er oneindig veel, maar met oneindig (aan te geven met het symbool ∞) kunnen we niet rekenen. Wel kunnen we de oneven getallen en de even getallen net als de prehistorische veehouder deed aan elkaar koppelen:

1	3	5	7	9...
2	4	6	8	10...

Het werkt prima, elk getal komt aan de beurt en heeft een partner. Daarmee heeft de uitspraak dus zin gekregen.

Aftelbaar oneindig Nu de volgende bewering: *Er zijn evenveel kwadraten als natuurlijke getallen.* Dat lijkt vreemd, want onder de natuurlijke getallen:

$\underline{0}$ $\underline{1}$ 2 3 $\underline{4}$ 5 6 7 8 $\underline{9}$ 10 11 12 13 14 15 $\underline{16}$...

komen de kwadraten (onderstreept) steeds schaarser voor. Toch is de oneindigheid van de kwadraten van dezelfde soort als de oneindigheid van de rij van de natuurlijke getallen. Het paringsprincipe werkt namelijk zonder problemen:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10...
0	1	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2	10^2...

Deze soort oneindigheid wordt *aftelbaar oneindig* genoemd. Op dezelfde manier kunnen we laten zien dat de verzameling van alle derde machten, of willekeurig hogere machten, aftelbaar is.

Deze bespiegelingen over 'oneindig veel' zijn dus afkomstig van Cantor. Hij liet ook zien dat er verzamelingen bestaan waarvan het aantal elementen wel oneindig is, maar *niet* aftelbaar oneindig. We zullen zijn ideeën nog dikwijls tegenkomen.

Hilbert-hotel

David Hilbert (1862-1943), die aan het begin van deze eeuw als een van de belangrijkste wiskundigen werd beschouwd, illustreerde het begrip aftelbaar oneindig met het volgende verhaaltje.
Een hotel bevat aftelbaar oneindig veel kamers, genummerd 1, 2, 3, ... Alle kamers zijn volledig bezet. Er meldt zich een nieuwe gast. De portier, geen wiskundige, geeft hem te verstaan dat het hotel vol is en dat er dus geen plaats meer is. Maar de gerant weet raad. Hij laat alle gasten één plaats opschuiven, zodat kamer 1 vrijkomt voor de nieuwe gast.
Vervolgens komt er een rij van honderd nieuwe gasten.
'Vol', zegt de portier.
'Geen nood', zegt de gerant, 'laat de gasten van de kamers 1, 2, 3, ... maar verhuizen naar de kamers 101, 102, 103, ...'
Zo komen er dan honderd kamers beschikbaar en iedereen kan tevreden zijn.
Ten slotte arriveert er een rij van aftelbaar oneindig veel nieuwe gasten, een werkelijk eindeloze rij. De portier is radeloos, maar de gerant ziet opnieuw een oplossing. Hij laat alle hotelgasten verhuizen naar een kamer met het dubbele rangnummer. Dus:

$$1 \to 2 \quad , \quad 2 \to 4 \quad , \quad 3 \to 6 \quad , \quad \ldots$$

Zo komen alle kamers met oneven rangnummers vrij en kunnen, de een na de ander, door een nieuwe gast worden bezet. Iedereen komt aan de beurt. En weer is iedereen uiteindelijk tevreden.

Evenveel breuken als natuurlijke getallen

Een nog wonderlijker bewering is: *Er zijn evenveel breuken als natuurlijke getallen.* Onder breuken verstaan we echte breuken van de vorm p/q met p en q natuurlijke getallen (waarbij q niet gelijk aan nul mag zijn). Verder nemen we daarbij aan dat de breuk zoveel mogelijk vereenvoudigd is. Dus 24/60, 12/30 en 8/20 komen niet voor, want ze kunnen alle worden vereenvoudigd tot 2/5. Op het eerste gezicht valt het niet mee om een geschikte paring te verzinnen. Breuken kunnen niet worden afgeteld door ze naar toenemende grootte te ordenen. Ook al beperken we ons tot de breuken tussen 0 en 1. Na nul bestaat er namelijk geen kleinste breuk. We komen eenvoudig niet weg van nul. Hoe het wel moet, toont het volgende lijstje:

$$\frac{1}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{5}{6} \quad \ldots$$

Daarin zijn de breuken eerst naar opklimmende noemer en vervolgens naar opklimmende teller geordend. Het is duidelijk dat elke breuk in deze aftelling aan de beurt komt. Dat betekent dat de verzameling breuken tussen 0 en 1 aftelbaar oneindig is.
Om de breuken groter dan één af te tellen, passen we de laatste truc toe van het hilbert-hotel (verhuizen naar kamers met dubbele nummers):

$$\frac{1}{1} \quad \frac{2}{1} \quad \frac{3}{1} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{4}{1} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{5}{1} \quad \frac{5}{2} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{5}{4} \quad \frac{6}{1} \quad \frac{6}{5} \quad \ldots$$

Dat ontstaat door elke breuk uit het bovenste rijtje om te keren. Voegen we beide rijen samen tot:

$$\frac{1}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{1} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{4}{1} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{1}{5} \quad \ldots$$

dan krijgen we een aftelling van alle (positieve) breuken. De natuurlijke getallen zijn daarbij gelijk meegenomen door ze op te vatten als een breuk met noemer 1.

Onmeetbare getallen

Breuken worden als meetbare of rationale getallen betiteld, omdat ze kunnen worden gemeten als de verhouding van twee natuurlijke getallen. Daarnaast zijn er de onmeetbare of irrationale getallen, zoals pi of $\sqrt{2}$. Die getallen kunnen worden geschreven als oneindig voortlopende breuken. Hun breukontwikkeling breekt dus niet af en is ook niet periodiek. Het soort talstelsel is daarbij niet zo van belang. Zowel in het tientallig als in elk ander talstelsel is de breukontwikkeling van een onmeetbaar getal onregelmatig en gaat oneindig door. Gemakshalve houden we ons dan maar aan het tientallig talstelsel.
Elke afbrekende of periodieke decimale breuk levert een meetbaar getal op. Een willekeurige oneindig voortlopende breuk zonder periodiek patroon is echter altijd een onmeetbaar getal. Breken we dat patroon ergens af, dan vinden we een benadering door een meetbaar getal. De nauwkeurigheid, dat wil zeggen de gemaakte fout, hangt af van de plaats achter de komma waar we afbreken. Die fout kunnen we zo klein maken als we maar willen. In die zin kan een onmeetbaar getal altijd worden opgevat als de limiet van een rij meetbare getallen.

Onaftelbaar oneindig

Denken we de meetbare getallen tussen 0 en 1 naar grootte geordend, dan wordt dat interval er geheel mee gevuld. Tussen twee meetbare getallen, hoe dicht ook bij elkaar, bevindt zich altijd nog een meetbaar getal. Ja zelfs oneindig veel. Om dat in te zien is het al voldoende het (rekenkundig) gemiddelde te nemen. Toegepast op de breuken 5/12 (= 0.416 667 ...) en 3/7 (= 0.428 571 ...) levert dat 71/168 = 0.422 619 ... .
Het kan echter mooier. We vormen een nieuwe breuk door de tellers èn de noemers apart op te tellen:

$$\frac{5+3}{12+7} = \frac{8}{19} = 0.421\,053\ldots$$

Het lijkt er dus op dat de meetbare getallen het interval [0,1] geheel vullen. Toch zitten er overal nog onmeetbare getallen tussen. En wat helemaal wonderlijk is, is het feit dat er 'veel meer' onmeetbare dan meetbare getallen zijn. In de woorden van Cantor: *De verzameling van de onmeetbare getallen is onaftelbaar oneindig.*
Met deze uitspraak van Cantor komen we een tweede soort oneindigheid tegen. Het lijkt een heel probleem om die bewering te bewijzen, maar de redenering van Cantor is zo origineel en eenvoudig, dat we er even aandacht aan willen besteden. Het is een voorbeeld van een zogenaamd indirect bewijs. Uitgaande van het tegendeel laat men zien dat dit tot een tegenspraak leidt.
Met Cantor veronderstellen we dus dat alle getallen tussen 0 en 1, meetbare en onmeetbare te zamen, aftelbaar zijn. We zouden ze dan aan kunnen geven met $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Elk van die getallen denken we geschreven als een oneindig voortlopende decimale breuk. Mocht de breuk eindig veel decimalen hebben, dan zetten we de ontwikkeling met nullen voort.
Vervolgens construeren we decimaal voor decimaal een nieuw getal b. Daarbij zorgen we ervoor dat de eerste decimaal van b verschilt van de eerste decimaal van a_1, dat de tweede decimaal van b verschilt van de tweede decimaal van a_2, dat de derde decimaal van b verschilt van de derde decimaal van a_3, enzovoort. Het aldus geconstrueerde getal b zou ook in de telling moeten voorkomen, zeg als getal a met rangnummer n. Maar krachtens de constructie verschillen b en a_n in de n-de decimaal. Er is dus een tegenspraak ontstaan die alleen kan worden opgelost door het uitgangspunt, de veronderstelling van aftelbaarheid, te verwerpen.

Limietpunten

Bij de beschrijving van fractals gebruiken we vaak de term limiet of limietpunt. In principe gaat het om een oneindige rij getallen, zeg $a_1, a_2, a_3, \ldots$ die tot een bepaald getal, de limiet, naderen. Een paar eenvoudige voorbeelden:

$$1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2^2} \quad \frac{1}{2^3} \quad \frac{1}{2^4} \quad \ldots \rightarrow 0$$

$$\frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{5}{6} \quad \ldots \rightarrow 1$$

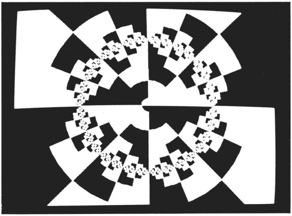
$$3 \quad 3.1 \quad 3.14 \quad 3.141 \quad 3.1415 \quad \ldots \rightarrow \pi$$

Noemen we L de limiet van de rij a_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, dan wil dit zeggen dat op den duur, wanneer het rangnummer n maar voldoende groot wordt, de afwijking van a_n tot de limietwaarde willekeurig klein is. In wiskundige taal:

$$| \, a_n - L \, | \rightarrow 0 \text{ voor } n \rightarrow \infty$$

Het derde voorbeeld laat zien dat een onmeetbaar getal als pi de limiet is van een rij meetbare getallen. Zoals we zien, kunnen die getallen uit de decimale ontwikkeling van pi worden afgeleid door die ontwikkeling telkens een positie verder af te breken. De fout die we maken, is kleiner dan de laatste decimale eenheid, dus achtereenvolgens 1, 1/10, 1/100, 1/1000, 1/10000,... . Op overeenkomstige wijze kan elk onmeetbaar getal worden opgevat als limiet van een rij meetbare getallen.
Hetzelfde zeggen we ook nog eens in meetkundige taal. Letten we op het lijnstuk *OE* waarop de getallen tussen 0 en 1 zijn afgebeeld, dan corresponderen de meetbare getallen, de echte breuken, met meetbare punten. Dat zijn er aftelbaar oneindig veel. Ze vormen een stofachtige puntverzameling vol 'microscopische' gaatjes, omdat tussen twee meetbare getallen altijd onmeetbare getallen liggen. Die 'gaatjes' zijn de limieten, of liever limietpunten in meetkundige taal, van rijen meetbare punten, dat wil zeggen de onmeetbare getallen of punten.
We komen nu tot een verrassende conclusie die intuïtief nogal paradoxaal lijkt. Ook de rationale punten tussen 0 en 1 vormen een aftelbare verzameling. De 'gaatjes' in die verzameling, de irrationale punten, zijn niet meer aftelbaar, maar vormen een verzameling met een hogere orde van oneindigheid!
Het limietbegrip kan gemakkelijk worden uitgebreid voor puntverzamelingen in een plat vlak en is daarmee van toepassing op alle fractals die we in dit boek tegenkomen. Een veel voorkomende situatie is dat een fractal stap voor stap wordt opgebouwd uit puntenreeksen. Na oneindig veel stappen is er dan een puntverzameling van aftelbaar oneindig veel punten gevormd. Hieraan worden dan de limietpunten toegevoegd, dat wil zeggen de gaten worden gedicht. Het resultaat kan van uiteenlopende aard zijn. Er kan een stoffractal gevormd zijn, bestaande uit oneindig veel punten zonder onderlinge samenhang, zoals bij de cantor-verzameling (figuur 2.1). Het kan ook gebeuren dat het 'dichten van de gaatjes' juist

tot samenhang leidt, zoals de fractal van Von Koch (figuur 3.1), een continue kronkellijn.
Ten slotte is het mogelijk dat de toevoeging van de limietpunten tot een vlakvullende fractal leidt. Die situatie zullen we tegenkomen bij de draakkromme (figuur 3.24) bij oneindige verfijning. Het is niet moeilijk om een nog eenvoudiger voorbeeld van zo'n situatie te verzinnen. Daartoe vormen we eerst de verzameling van alle meetbare punten (x,y) in het eenheidsvierkant, dat willen zeggen alle punten waarvoor x èn y echte breuken zijn. Die verzameling bestaat uit aftelbaar oneindig veel losse punten die niet samenhangen. Toevoeging van de limietpunten geeft *alle* punten van het vierkant met $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.

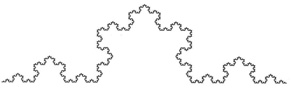


Binaire verdeling van een cirkelgebied

Kronkels en fractals

In dit hoofdstuk wordt het begrip fractal ingeleid aan de hand van een voor ons belangrijk experiment. Daarin werd gepoogd de lengte van de kust van Engeland te bepalen. Dat experiment leidt tot een maat voor de kronkeligheid van een kustlijn of een grenslijn. Die maat, een getal tussen 1 en 2, zou later door Benoit B. Mandelbrot de 'fractal dimension' worden genoemd.
Na behandeling van dat experiment bekijken we historisch gezien een van de meest interessante fractals, in 1904 door de wiskundige Helge von Koch bedacht. Het is een wiskundig gedefinieerde kustlijn met driehoekige uitsteeksels op elke schaal (figuur 3.1), een voorbeeld van een kromme die nergens een raaklijn heeft. Hij is nauw verwant met de in het vorige hoofdstuk behandelde puntverzameling van Cantor. De koch-fractal is het prototype van een uitgebreide familie van fractals die allemaal berusten op de herhaling van een eenvoudige meetkundige transformatie. Bij deze transformatie wordt een lijnstukje (de basis) vervangen door een gebroken lijn (het model). We geven een aantal voorbeelden van fractals uit deze familie en hopen dat de lezer met potlood en papier, of liever met de microcomputer, zelf verdere experimenten uitvoert. Appendix B bevat daartoe een vrij algemeen computerprogramma.

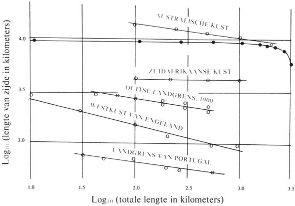
Figuur 3.1 Fractal van Von Koch.



Het experiment van Richardson

Vooral door de publikaties van de wiskundige Benoit B. Mandelbrot zijn fractals sterk in de belangstelling gekomen. In zijn fraaie, maar wat moeilijk leesbare, boek *The fractal geometry of nature* is er veel over te vinden, mooie illustraties, historische anekdotes, enzovoort. Mogelijk heeft het experiment van Lewis Fry Richardson (1881-1953), een wat zonderlinge Engelse meteoroloog, Mandelbrot ertoe gebracht, of in elk geval gestimuleerd, om van de fractals zijn levenswerk te maken.

Onder de nagelaten en postuum gepubliceerde geschriften van Richardson trof Mandelbrot in 1961 metingen aan ter bepaling van de lengte van onder andere de westkust van Engeland en de landgrens tussen Portugal en Spanje. Hij merkte op dat het resultaat sterk afhangt van de schaal van de gebruikte landkaart. Een kaart waarop 1 cm correspondeert met 100 km (schaal 1:10000000) vertoont nu eenmaal minder details dan een wandelkaart waarop 1 cm overeenkomt met 1 km (schaal 1:100000). Hoe meer details er zichtbaar worden, hoe langer de kustlijn wordt!
Hetzelfde verschijnsel kunnen we ook beschrijven door maar één kaart te gebruiken waarin alle details zichtbaar zijn, en bij elke meting telkens een kleinere meet-eenheid te gebruiken. We zouden als eerste grove schatting kunnen beginnen met een meet-eenheid van 100 km om die bij volgende metingen telkens met een factor 10 te verkleinen. Verkleinen met een factor 10 is eigenlijk nogal willekeurig. De meet-eenheid zou net zo goed telkens met een factor 2 of 3 kunnen worden verkleind.



Figuur 3.2 Resultaten van het experiment van Richardson.

Wat Richardson in werkelijkheid deed blijkt uit figuur 3.2. Daarin zijn horizontaal op logaritmische schaal de gebruikte meet-eenheden uitgezet. We zullen ze aangeven met a. Naar links toe wordt a kleiner. Verticaal is, eveneens op logaritmische schaal, de gemeten lengte s uitgezet. De verkregen meetresultaten zijn aangegeven door een rondje.
Opvallend is dat voor een grenslijn de meetresultaten ongeveer op een rechte lijn blijken te liggen. Voor de westkust van Engeland leidt dat tot een formule van de vorm:

$$\log s = -0.22 \log a + \log s_1$$

met s_1 de lengte bij een meet-eenheid a van 1 km. Het getal 0.22 is een maat voor de helling van die lijn met meetresultaten.
De formule geeft een lineair verband tussen de logaritmen van de

gebruikte meet-eenheid en de daarmee verkregen kustlengte. Zonder logaritmen kan hetzelfde uitgedrukt worden als:

$$s = s_1\, a^{0.22}$$

of:

$$s = s_1 \left(\frac{1}{a}\right)^{0.22}$$

Hieraan zien we wat de gevolgen zijn, wanneer we a verkleinen. Wordt a met een factor 32 verkleind, dan leidt dit tot verdubbeling van s. In gedachten kunnen we almaar verder verkleinen. Ten slotte zou dat leiden tot de conclusie dat de westkust van Engeland oneindig lang is!

Natuurlijk is dit alleen waar, als de kronkeligheid van de kustlijn zich op steeds kleinere schaal blijft herhalen. Tot op zekere hoogte is dit wel reëel. Men zou zich namelijk voor kunnen stellen dat een landmeter telkens met een steeds kleinere duimstok de kust afloopt. Rotsblokken die groot zijn ten opzichte van zijn meetlat, meet hij zorgvuldig, terwijl hij stenen die klein zijn ten opzichte van zijn meetlat, verwaarloost.

Het begrip lengte van een kust of een landgrens is blijkbaar niet zo handig. Beter is het de aard van zo'n grens, de mate van kronkeligheid, in een getal uit te drukken. Daarbij zouden we kunnen denken aan de hellingen van de lijnen in het grafiekje van Richardson (figuur 3.2). Zoals we zagen, is dat voor de westkust van Engeland ongeveer 0.22. Voor een wiskundig gladde lijn als een cirkel heeft opeenvolgende schaalverkleining echter geen effect. De lijn met meetresultaten voor de lengte zou daar precies horizontaal lopen en dus een helling 0 geven. Mandelbrot telt er 1 bij op, beschrijft de helling als $D-1$ en noemt D de 'fractal dimension' van de betrokken kust- of grenslijn.

Kronkelwaarde

Het begrip dimensie heeft in de wiskunde verschillende betekenissen. De meest gebruikelijke definitie heeft betrekking op de zogenaamde topologische dimensie. Die is altijd geheeltallig. Zo hebben punt, lijn en vlak achtereenvolgens de dimensies 0, 1 en 2, terwijl wij leven in een driedimensionale ruimte. Het is niet eenvoudig dit dimensiebegrip wiskundig streng te funderen. De Nederlander L.E.J. Brouwer (1882-1966), een van de belangrijkste wiskundigen uit de twintigste eeuw, heeft daartoe de weg gewezen. Daarnaast zijn er door wiskundigen als Felix Hausdorff (1868-1942), A.S. Besicovich (1891-1970) en A. N. Kolmogorov andere definities gegeven die niet noodzakelijk tot heeltallige dimensies hoeven te leiden. Voor een kronkellijntje komt een van die definities op het volgende neer.

Men kiest een willekeurig kleine meet-eenheid a, de meetlat. Ver-

volgens meet men de lengte van de kronkellijn door die zo goed mogelijk te benaderen door een gebroken lijn met gelijke lijnstukjes van de lengte a. Laten we veronderstellen dat de meetlat N-maal gebruikt wordt, zodat de totale gemeten lengte Na is, dan wordt volgens Mandelbrot de 'fractal dimension' D gedefinieerd als:

$$(A)\ D = \lim_{a \to o} \frac{\log N}{\log (\frac{1}{a})}$$

Voorlopig noemen we D de 'kronkelwaarde' van de kronkellijn, omdat we later een beter en algemener dimensiebegrip zullen introduceren. Bij deze formule merken we op dat $\log(1/a)$ gelijk is aan $-\log a$. Bovendien maakt het niet uit of we logaritmen met grondtal 10 of met een ander grondtal gebruiken. Bij toepassingen laten we a vaak met stapjes kleiner worden, bij voorbeeld door a telkens met een factor 3 te verkleinen. De breuk $\log N/\log(1/a)$ kan dan op den duur tot een vaste waarde, de limiet, naderen. In sommige gevallen behoudt die breuk bij elke stap dezelfde waarde. Formule (A) kan dan eenvoudiger worden geschreven als:

$$(B)\ D = \frac{\log N}{\log(\frac{1}{a})}$$

of in een daaraan gelijkwaardige vorm:

$$N = (\frac{1}{a})^D$$

Bedenken we dat Na de totale gemeten lengte is waarvoor we eerder s schreven, dan volgt hieruit de formule:

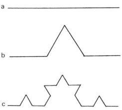
$$s = (\frac{1}{a})^{D\text{-}1}$$

die nog eens duidelijk laat zien hoe de gemeten lengte toeneemt bij afnemende meet-eenheden.

Kromme van Von Koch

In 1904 gaf de wiskundige Helge von Koch een voorbeeld van een kromme die nergens een raaklijn heeft. Voor de toenmalige wiskundigen een schokkende ervaring, een curiositeit zonder praktische waarde, een hersenspinsel. Stel u voor, een kromme waarvan elk onderdeeltje, hoe klein ook, een oneindige lengte bezit! Nu, een kleine eeuw later, blijken dergelijke 'pathologische krommen', zoals men ze destijds betitelde, overal in de zuivere en in de toegepaste wiskunde op te treden. Figuur 3.1 is een goede benadering van de kromme van Von Koch. De echte kromme bestaat echter alleen

Figuur 3.3 Constructie van de fractal van Von Koch.



in onze gedachten. We zouden er met een oneindig dun potlood oneindig veel tijd voor nodig hebben, zelfs als we ons met de lichtsnelheid langs de kromme voortbewegen.

De kromme van Von Koch kunnen we ons voorstellen als de limietfiguur van een reeks benaderingen als aangegeven in figuur 3.3. De constructie lijkt veel op die van de puntverzameling van Cantor uit het vorige hoofdstuk. Ook hier gaan we uit van een lijnstuk, de *basis*, en nemen we het middelste derde gedeelte weg. Maar nu vullen we het gat op met de opstaande zijden van een gelijkzijdige driehoek. Er ontstaat dan een gebroken lijn van vier gelijke lijnstukken (figuur 3.3b), het zogenaamde *model* of *motief*. Als de basis een lengte 1 heeft, dan bestaat het model uit vier lijnstukjes, elk met lengte 1/3, en heeft dus een totale lengte van 4/3.

In de volgende fase wordt elk van de vier lijnstukjes als basis opgevat en vervangen door het overeenkomstige model op kleinere schaal. Het resultaat wordt een gebroken lijn met 4 × 4 = 16 lijnstukjes (figuur 3.3c) en een totale lengte van 16/9 of $(4/3)^2$. Op dezelfde manier levert de derde stap $4^3 = 64$ lijnstukjes elk met een lengte $(1/3)^3 = 1/27$.

Omdat in dit geval:

$$\frac{\log 4}{\log 3}, \frac{\log 4^2}{\log 3^2}, \frac{\log 4^3}{\log 3^3}, \ldots$$

steeds dezelfde waarde levert, kunnen we formule (B) toepassen en vinden dan:

$$D = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.26$$

In de limiet zijn van de oorspronkelijke basis (figuur 3.3a) herhaaldelijk alle middelste delen weggenomen. Wat overblijft is precies de verzameling van Cantor. De kromme van Von Koch is zelfgelijkvormig. Elk onderdeel, hoe klein ook, is weer een miniatuur van het geheel. Het zit dus vol met puntverzamelingen van Cantor.

Beter inzicht Er zijn verschillende methoden om voor de kochkromme een computerprogramma te schrijven. We beschrijven hier de wiskundige achtergrond van het programma KOCH uit appendix B. Daarmee krijgen we een beter inzicht in de structuur van de kromme en van een fractal in het algemeen.

Van tevoren spreken we af welke benadering we willen gebruiken. Die benadering geven we aan met het getal p, de *orde*. Dat betekent dat we op het basislijnstuk p transformaties toepassen. Er ontstaat dan een kronkellijn met 4^p gelijke lijnstukjes. Achteraf, wanneer we het programma door de computer laten uitvoeren, kunnen we dan bij voorbeeld p gelijkstellen aan 4 of 5.

De lijnstukjes denken we genummerd van 0 tot en met $4^p - 1$. Voor elk rangnummer n moet er dus een lijnstukje, of liever een vector, worden getekend waarvan de lengte $(1/3)^p$ is. Waar het op neerkomt

is de richting van de vector te vinden. Het recept daarvoor is als volgt.
Schrijf het rangnummer n van een lijnstukje in het viertallig talstelsel. Voor bij voorbeeld lijnstukje 482 in de kronkellijn met orde $p = 5$ krijgen we dan:

$$
\begin{aligned}
482 &= 1{\times}256 + 3{\times}64 + 2{\times}16 + 0{\times}4 + 2 = \\
&= 1 \quad\; 3 \quad\; 2 \quad\; 0 \quad\; 2
\end{aligned}
$$

Aan de vier mogelijke richtingen kennen we een wijzergetal toe dat we uit het model aflezen (figuur 3.4). De richting van lijnstukje 482 wordt dan:

$$\phi = \frac{\pi}{3} + 0 - \frac{\pi}{3} + 0 - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$$

De algemene formule is:

$$n = t_0 + t_1 \cdot 4 + t_2 \cdot 4^2 + \ldots + t_{p-1} \cdot 4^{p-1}$$

$$\phi = a(t_0) + a(t_1) + a(t_2) + \ldots + a(t_{p-1})$$

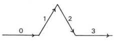
Het is niet moeilijk dit recept te doorzien. We laten daartoe aan de hand van figuur 3.5 nog eens zien hoe het lijnstukje met rangnummer 482 uit de oorspronkelijke basis is ontstaan. Met elk van de vijf wijzergetallen komt steeds een keuze uit een der vier mogelijke richtingen overeen. Voor de duidelijkheid is in figuur 3.5 de verkleining achterwege gelaten.
Eigenlijk is het beter de lijnstukjes van de p-de benadering niet te nummeren met gehele getallen, maar met viertallige breuken met p cijfers achter de punt. Daartoe hoeven we slechts door 4^p te delen. In ons voorbeeld met $p = 5$ levert dat:

$$\frac{482}{1024} = 0.\,1\,3\,2\,0\,2$$

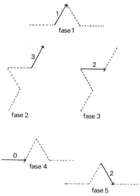
Wanneer we in gedachten p oneindig groot nemen, wordt zo elk lijnstukje tot een punt gereduceerd. Bij elk punt hoort een oneindig voortlopende breuk in het viertallig stelsel en omgekeerd. Die breuken zijn alle getallen tussen 0 en 1, zowel meetbaar als onmeetbaar, een onaftelbare hoeveelheid. We komen dus tot de conclusie dat de kromme van Von Koch een getrouwe kopie – in wiskundige termen een continue afbeelding – is van het eenheidslijnstukje (de basis), dat wil zeggen van alle getallen tussen 0 en 1.

Variaties Leuke figuren ontstaan wanneer we een uit een lijnstukje gevormde fractal als de koch-kromme op alle zijden van een regelmatige veelhoek plaatsen. Vatten we bij voorbeeld elk van de zijden van een gelijkzijdige driehoek op als basis voor een naar buiten gerichte koch-kromme, dan ontstaat figuur 3.6, door Mandelbrot een koch-eiland genoemd. De koch-krommen zouden na-

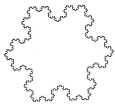
Figuur 3.4 Model van de fractal van Von Koch.



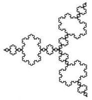
Figuur 3.5 Fractal van Von Koch en het drietallige stelsel.



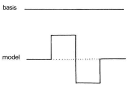
Figuur 3.6 Koch-eiland.



Figuur 3.7 *Binnenste-buitengekeerd koch-eiland.*



Figuur 3.8 Model voor de fractal van Minkowski.



Figuur 3.9 Fractal van Minkowski.

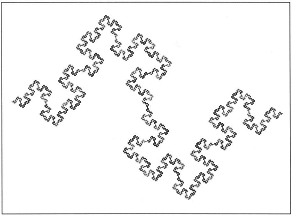
tuurlijk ook naar binnen kunnen worden geplaatst. We vinden dan figuur 3.7, iets heel anders.

Het herhaalde motief

De kromme van Von Koch is het prototype van een uitgebreide fractal-familie. Uitgangspunt is steeds een lijnstuk (de basis) en een motief (het model), een gebroken lijnstukje waardoor elk recht lijnstukje telkens wordt vervangen. Bij de koch-kromme is dat de stap van *a* naar *b* in figuur 3.3.

Een ander voorbeeld is een motief met acht gelijke lijnstukjes (figuur 3.8). Na vier stappen krijgt men al de kronkellijn uit figuur 3.9, de zogeheten worst van Minkowski, door Mandelbrot zo genoemd ter ere van de veel te vroeg overleden vriend en collega van Einstein.

Ook hier kan formule (B) met $N = 8$ en $a = 1/4$ al bij de eerste stap worden toegepast. Het resultaat wordt $D = 1.5$. Het programma voor de worst van Minkowski is in appendix B opgenomen onder de naam MINK. Het lijkt erg op dat van de koch-kromme, maar hier moeten we het achttallig talstelsel gebruiken.



Algemeen programma Het programma KRONKEL is een algemeen programma dat ons in staat stelt om een willekeurig motief (met niet te veel lijntjes) te gebruiken. De hieruit gevormde fractal kan worden aangebracht op een willekeurige beginlijn, bij voorbeeld net als in de figuren 3.6 en 3.7 de zijden van een gelijkzijdige driehoek. Bij dit algemene programma gaan we ervan uit dat de basis uit *u* lijnstukken bestaat en het model uit *v* lijnstukken. Zowel voor de basis als voor het model moeten de hoekpunten in een aparte datalijst worden vermeld. Daarbij doen we een beroep op de beginselen

van de coördinatenmeetkunde, zoals behandeld in het vorige hoofdstuk.

In figuur 3.10 is O de oorsprong met coördinaten (0,0) en E het eenheidspunt met coördinaten (1,0). De coördinaten van een willekeurig punt zijn de (van een teken voorziene) afstanden tot de X-as en de Y-as.

In figuur 3.10 is gekozen voor een heel eenvoudig motief van drie gelijke lijnstukjes die loodrecht op elkaar staan. Dit motief wordt bepaald door de punten O, P_1, P_2 en E, waarbij P_1 coördinaten (0.4,0.2) heeft, en P_2 coördinaten (0.6,-0.2). Hieruit volgt dat $OP_1 = P_1P_2 = P_2E = 1/\sqrt{5}$.

Als basis kunnen we bij voorbeeld een vierkant nemen. Daartoe moeten in de datalijst van het programma de coördinaten van de hoekpunten worden opgenomen: (1,1), (–1,1), (–1,–1), (1,–1), (1,1). We beginnen en eindigen met hoekpunt (1,1), zodat dit tweemaal wordt vermeld.

Na invoer van deze gegevens in het programma als:

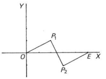
$u = 4$, $v = 3$
data beginlijn 1, 1, –1, 1, –1, –1, 1, –1, 1, 1
data model .4, .2, .6, –.2

moet de orde van de benadering nog worden vastgelegd. Omdat in dit programma bij een hogere orde ook het computergeheugen zwaarder wordt belast kan de orde niet te hoog gekozen worden. Bij de keuze van de orde speelt ook het oplossend vermogen van het beeldscherm een beperkende factor. In het algemeen ontstaan uit het lijnstuk OE, $v^p - 1$ nieuwe hoekpunten. Gaan we uit van $2^{10} = 1024$ geheugenplaatsen voor zowel de x- als de y-coördinaat van elk hoekpunt, dan kunnen we bij $v = 3$ tot $p = 6$ gaan. Bij berekening van de coördinaten van de $v^p + 1$ hoekpunten van de uit OE gevormde kronkel zorgen we ervoor dat ze netjes in een array $x(n)$,$y(n)$ terechtkomen. De telindex n van dit array loopt van 0 tot v^p. Na deze berekening kunnen ze dan voor elke zijde van de basis worden gebruikt.

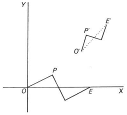
Net als in de meetkundige constructie worden in het programma de coördinaten van de hoekpunten stap voor stap berekend door telkens een klein lijnstukje te vervangen door een verkleinde kopie van het oorspronkelijke model. Wiskundig komt dit neer op het uitvoeren van een gelijkvormigheidstransformatie, de kern van menig computerprogramma. We komen later wat uitvoeriger op dit onderwerp terug. Hier beperken we ons aan de hand van figuur 3.11 tot een vermelding van de transformatie-formules. We nemen aan dat het model OPE gelijkvormig overgebracht moet worden naar de nieuwe basis $O'E'$ en dat O' en E' zijn bepaald door de coördinaten (x_1,y_1) en (x_2,y_2). Anders gezegd: $(0,0) \rightarrow (x_1,y_1)$ en $(1,0) \rightarrow (x_2,y_2)$.

Heeft het hoekpunt P van het model de coördinaten (x,y), dan volgen die van het getransformeerde hoekpunt $P'(x',y')$ uit:

Figuur 3.10 Model in cartesische coördinaten.



Figuur 3.11 Gelijkvormigheidstransformatie.



$$x' = (x_2 - x_1)x - (y_2 - y_1)y + x_1$$
$$y' = (y_2 - y_1)x + (x_2 - x_1)y + y_1$$

Experimenteren

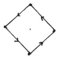
Na dit wiskundig intermezzo, noodzakelijk wanneer men de computerprogramma's ook wil begrijpen, kunnen we naar hartelust experimenteren. We laten hieronder een aantal mogelijkheden volgen. We vermelden daarbij telkens de gegevens van de basis, het model, enzovoort.
Het eerste experiment gaat uit van figuur 3.10 met een vierkant als basis. In de onderstaande reeks voorbeelden kiezen we als beginlijn of basis een lijnstuk, vierkant of driehoek. Daarbij is de oriëntatie van belang, omdat de kronkellijn aan weerskanten van een recht lijnstuk kan worden geplaatst. Zo zijn er de volgende mogelijkheden.

Lijnstuk enkelvoudig
coördinaten (0,0) , (1,0)
$u = 1$

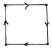
Lijnstuk tweevoudig
coördinaten (0,0) , (1,0) , (0,0)
$u = 2$

Vierkant binnenwaarts
coördinaten (–1,–1) , (1,–1) , (1,1) , (–1,1) , (–1,–1)
$u = 4$

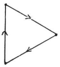
idem
coördinaten (–1,0) , (0,–1) , (1,0) , (0,1) , (–1,0)
$u = 4$



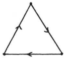
Vierkant buitenwaarts
coördinaten (–1,–1) , (–1,1) , (1,1) , (1,–1) , (–1,–1)
$u = 4$



Driehoek buitenwaarts
coördinaten (–0.5,0.866) , (1,0) , (–0.5,–0.866) , (–0.5,0.866)
$u = 3$



idem
coördinaten (–0.866,–0.5) , (0,1) , (0.866,–0.5) , (–0.866,–0.5)

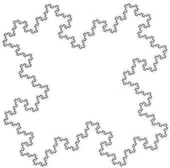


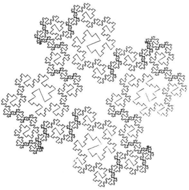
Figuur 3.12 Fractal-eiland.

a.
Basislijn

Vierkant met hoekpunten
$(\pm 1, \pm 1)$.
Model

met tussenpunten
(0.4,0.2) , (0.6,–0.2).
$u = 4$, $v = 3$, $p = 4$.





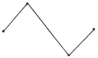
Figuur 3.14 Fjorden-eiland.

c.
Basislijn als in a.
Model

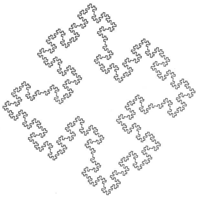
met tussenpunten
(0.3,0.3) , (0.7,–0.3).
$u = 4$, $v = 3$, $p = 5$.
Hoewel het model maar weinig van dat van het vorige voorbeeld verschilt is het resultaat heel anders.

Figuur 3.13 Minkowski-eiland.

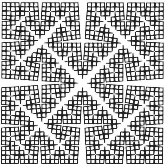
b.
Basislijn als in a.
Model



met tussenpunten
(1/4,1/4) , (3/4,–1/4).
$u = 4$, $v = 3$, $p = 5$.
Het resultaat, een variant van de vorige figuur, toont weer de kronkellijn van Minkowski.

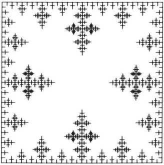


Figuur 3.15 Gescheurd vierkant.



d.
Basislijn als in a.
Model

met tussenpunten (0.47,0) , (0.5,0.47) , (0.53,0).
$u = 4$, $v = 4$, $p = 4$.

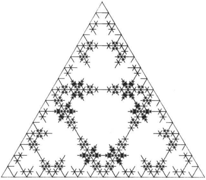


Figuur 3.16 Bevroren vierkant.

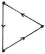
e.
Een variant van d. met dezelfde basislijn maar met het volgende model

met tussenpunten (0.5,0) , (0.5,0.33) , (0.5,0).
$u = 4$, $v = 4$, $p = 5$.
Het resultaat doet denken aan ijskristallen.

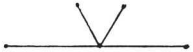
Figuur 3.17 Bevroren driehoek.



f.
Echte ijskristallen, sneeuwvlokken, zijn opgebouwd volgens een hexagonaal patroon, dus met hoeken van 60°. Dit geeft dan weer aanleiding tot de volgende driehoekige versie van e.
Basislijn



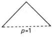
Model



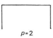
met tussenpunten (0.5,0) , (0.375,0.2165) , (0.5,0) , (0.625,0.2165) , (0.5,0).
$u = 3$, $v = 6$, $p = 4$.

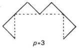
Figuur 3.18 Constructie van de fractal van Lévy.

g.
Het eenvoudigste model is de winkelhaak

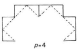


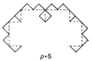
waarbij telkens een lijnstukje wordt vervangen door een half vierkant. Het is leuk om een paar beginfases van de opbouw van de uiteindelijke fractal te laten zien:

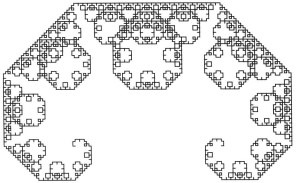




We zien dat in de vijfde fase de kronkellijn een lus vormt, een verschijnsel dat zich daarna steeds duidelijker manifesteert.







Figuur 3.19 Fractal van Lévy.

De 12-de fase is geïllustreerd in fig. 3.19. De gegevens zijn:
Basislijn

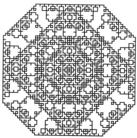
Model

met tussenpunt (0.5,0.5).
$u = 1$, $v = 2$, $p = 12$.

Kromme van Lévy

De kromme van figuur 3.19 – of liever de limietfiguur – staat bekend als de kromme van Lévy. De Franse wiskundige Paul Lévy (1886-1971) was een van de eerste onderzoekers van de figuren die later fractals zouden worden genoemd. Het interessante van de benadering uit figuur 3.19, de twaalfde trap, is dat we er alle voorafgaande benaderingen in terug kunnen vinden. We hoeven daartoe slechts het begin van de kronkellijn (met een vergrootglas) te bekijken en achtereenvolgens 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... lijnstukjes van dezelfde lengte af te tellen.

Figuur 3.20 Tapijt van Lévy.



Nu een kleine verrassing. We kiezen als basis een vierkant, zodat de kromme van Lévy viermaal getekend wordt. Het resultaat (figuur 3.20) is een fraaie symmetrische figuur waarin nauwelijks is terug te vinden hoe we zijn begonnen.

De kromme van Lévy kan ook op de wijze van de kromme van Von Koch worden behandeld. Van de 2^p lijnstukjes van de p-de benadering wordt met behulp van een ontwikkeling in het tweetallig stelsel de positie bepaald. Het rangnummer n van een lijnstukje, geteld vanaf het begin, schrijven we tweetallig als:

$$n = t_0 + t_1 \cdot 2 + t_2 \cdot 2^2 + t_3 \cdot 2^3 + \ldots + t_{p-1} \cdot 2^{p-1}$$

Daarna nemen we de som s van alle binalen:

$$s = t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_{p-1}$$

De richting van het n-de lijnstukje is dan $\phi = s\pi/2$.

Voor wiskundig geschoolden is dit wellicht voldoende. Maar omdat we aannemen dat niet iedereen de formules doorziet, zeggen we hetzelfde nog eens op een andere manier. Daarbij is alleen enige kennis van het tweetallig stelsel nodig.

Bij elk getal n definiëren we s als de som van het aantal enen in de tweetallige schrijfwijze van n. Bij voorbeeld $n = 105$ (tientallig) = 1101001 (tweetallig) $\rightarrow s = 4$.

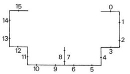
De beginwaarden van s kunnen in het volgende tabelletje worden afgelezen:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
s	0	1	1	2	1	2	2	3	1	2	...
	→	↓	↓	←	↓	←	←	↑	↓	←	...

De waarde van s modulo 4 (de rest bij deling van s door 4) geeft de richting van het lijnstukje aan. Dus:

$s = 0, 4, 8, \ldots$	naar rechts,
$s = 1, 5, 9, \ldots$	naar beneden,
$s = 2, 6, 10, \ldots$	naar links,
$s = 3, 7, 11, \ldots$	naar boven.

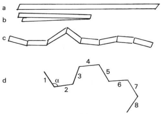
Figuur 3.21 Fractal van Lévy en het tweetallige stelsel.



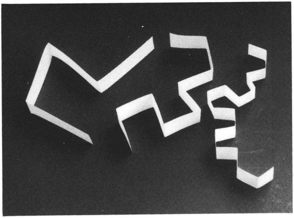
Hoe het werkt is te zien in figuur 3.21. Het verschil met de vorige methode is dat we hier vanuit het vertrekpunt in een vaste richting, naar rechts, vertrekken met een vooraf gekozen staplengte. Zonder computer zou de kronkellijn heel goed op ruitjespapier uitgevoerd kunnen worden. Maar we zouden spoedig zien dat we ons steeds verder van het beginpunt verwijderen. We kunnen met deze methode ook willekeurig lang doorgaan, tot in het oneindige! Het programma LEVY uit appendix B werkt volgens deze methode. Het voordeel van deze methode is dat uitvoering van dat programma weinig geheugenruimte vergt.

De drakenfamilie

We vouwen een lange, smalle strook papier dubbel, zodat er een scherpe vouw ontstaat (figuur 3.22a en b). Hetzelfde herhalen we nog eens tweemaal met vouwen in dezelfde richting. Na openvouwen zien we dan een strook met acht stukjes (figuur 3.22c). Kijken we er dwars langs, dan zien we een kronkellijn met de vouwlijnen als hoekpunten (figuur 3.22d).



Figuur 3.22 Gevouwen papierstroken.



Wiskundigen vragen zich bij zoiets altijd af hoe het verder gaat en welke wetmatigheden erachter zitten. Experimentatoren kunnen nog even doorgaan, maar niet lang. Na tien stappen is het te vouwen papier al meer dan duizendmaal zo dik geworden ($2^{10} = 1024$).
Wanneer we de kronkellijn van figuur 3.22d bekijken met onze kennis van de krommen van Von Koch en Lévy, dan is het enige dat voor de structuur van belang is, hoe we na een reeds getekend lijnstukje in de volgorde 1, 2, ..., 8 verder moeten gaan, naar links of naar rechts. De tussenliggende hoeken hebben we gelijk genomen en α genoemd. We kunnen het volgende lijstje maken:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
d	1	1	−1	1	1	−1	−1	1

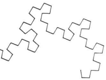
Daarbij betekent $d = 1$ naar links en $d = -1$ naar rechts. Van enige wetmatigheid is nog niets te bespeuren. We gaan daarom nog even door:

n	... 9	10	11	12	13	14	15	16
d	... 1	1	-1	-1	1	-1	-1	1

Om het systeem te ontdekken moeten we ons realiseren dat factoren 2 bij het vouwen een essentiële rol spelen. We ontdekken dan wellicht dat $d(16) = d(8) = d(4) = d(2) = d(1) = 1$, dat $d(12) = d(6) = d(3) = -1$ en dat $d(10) = d(5) = 1$. Langs deze weg komen we dan tot de volgende regel:

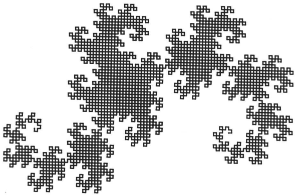
$d(n) = 1$	voor $n = 1, 5, 9, 13, \ldots$
$d(n) = -1$	voor $n = 3, 7, 11, 15, \ldots$
$d(n) = d(n/2)$	voor n is even

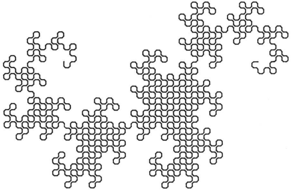
Figuur 3.23 Een stukje drakenlijn.



Draakkromme Met deze regel kunnen we de kronkellijn die bij herhaalde vouwing ontstaat, in elke gewenste fase tekenen, een mooi werkje voor de computer. Op die regel is dan ook het programma DRAAK gebaseerd waarmee de volgende illustraties kunnen worden vervaardigd.
Eerst figuur 3.23. Deze toont de kronkellijn met hoeken $\alpha = 100°$ voor $p = 6$. Er zijn dan $2^6 = 64$ lijnstukjes.
Vervolgens figuur 3.24, getekend met een tweede versie (DRAAK0) van het programma voor het speciale geval $\alpha = 90°$ waarbij er door ingebouwde schaling voor is gezorgd dat de kronkellijn altijd in (0,0) begint en in (1,0) eindigt. Voor figuur 3.24 is gekozen voor $p = 14$, zodat er dan $2^{14} = 16384$ lijnstukjes getekend moeten worden.

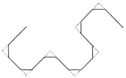
Figuur 3.24 Draakkromme.





Figuur 3.26 Afgeronde draakkromme.

De kronkellijn van figuur 3.24 deed de ontdekker J.E. Heighway denken aan Chinese draken. Sindsdien spreken we dan ook van draakkromme. Heel verrassend blijkt de kronkellijn zichzelf niet te snijden en in de draakgedeelten het vlak regelmatig op te vullen. Wie zelf met de computer wil experimenteren, dient (zoals al vaker opgemerkt) te bedenken dat ook hier het oplossend vermogen van het beeldscherm beperkingen stelt aan de te kiezen orde. Met bij voorbeeld $p = 10$ of $p = 12$ (liefst even getallen) worden echter ook goede resultaten verkregen.
Heel leuk is het om de rechte hoeken wat af te ronden, zoals in figuur 3.25 is aangegeven. Met het programma DRAAK1 kan dit voor hogere orden worden gerealiseerd. Figuur 3.26 geeft daarvan het resultaat voor $p = 10$.



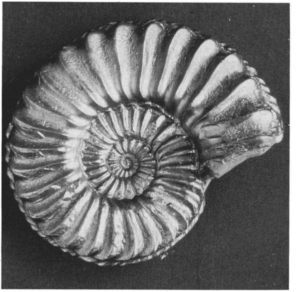
Figuur 3.25 Afronding van de draakkromme.

De draakkromme kan ook worden verkregen uit het motief van de kromme van Lévy, de winkelhaak. Het verschil is alleen dat bij de constructie van de diverse fasen een lijnstukje moet worden vervangen, òf door een winkelhaak, òf door een gespiegelde winkelhaak, om en om, zoals in figuur 3.27 is aangegeven.
Dit beginsel om een motief met zijn gespiegelde versie af te wisselen, kan natuurlijk ook op andere modellen worden toegepast. Er zijn vele varianten mogelijk. We laten het aan de vindingrijkheid van de lezer over om andere fraaie kronkellijnen te ontwerpen.

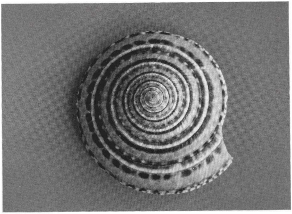
Spiralen, bomen en sterren

Dit hoofdstuk bouwt voort op thema's waarmee de Grieken zich tweeduizend jaar geleden al bezig hebben gehouden. Archimedes (287-212 v.C.) schreef een verhandeling over spiralen. Een bepaald soort spiraal draagt zelfs nog steeds zijn naam. Pythagoras (569-500 v.C.) bestudeerde de figuur waarbij op de zijden van een rechthoekige driehoek vierkanten zijn geplaatst. Hij bewees daarmee dat de som van de oppervlakten van de vierkanten op de rechthoekszijden gelijk is aan de oppervlakte van het vierkant op de schuine zijde. Die beroemde stelling van Pythagoras was overigens al eerder bekend bij de Babyloniërs. Daarvan getuigen een aantal kleitabletten met wiskundige inscripties in spijkerschrift. Die figuur van Pythagoras is nu, in de twintigste eeuw, uitgegroeid tot een 'boom' en spiralen zijn geworden tot bouwstenen van fractals.

Spiralen zijn ook de bouwstenen van de levende natuur. De celkern bestaat uit een lange spiraalsgewijze gewonden structuur, het kernzuur of DNA, drager van de erfelijke eigenschappen, een bouw-



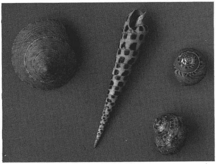
Figuur 4.1 Ammoniet.

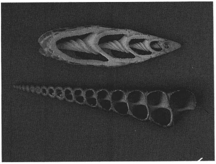


Figuur 4.2 Architectonica maxima.

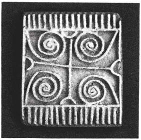
schema voor een te vormen organisme. Organismen kunnen zelf ook weer een spiraalstructuur hebben, zoals bij voorbeeld de Ammonieten (figuur 4.1), fossielen uit het Cambrium die zo'n tweehonderd miljoen jaar oud zijn. Diezelfde structuur valt nu nog waar te nemen bij talloze levende schelpen. In de figuren 4.2 en 4.3 tonen we een paar voorbeelden. Al deze spiralen zijn verbonden met groei, met zich ontwikkelende organismen. Reden genoeg om dit soort spiralen *groeispiralen* te noemen. Ook in de levenloze natuur zijn spiraalstructuren te vinden. Kijk maar eens naar opnamen van spiraalvormige melkwegstelsels (figuur 4.4).
De groeispiraal verbindt de microcosmos met de macrocosmos in een eeuwige wenteling. De Ashanti, een negerstam aan de goudkust, het tegenwoordige Ghana, pasten het spiraalmotief toe op hun goudgewichtjes, veelvormige koperen of bronzen gietstukjes bedoeld voor het afwegen van stofgoud. Figuur 4.5 toont een dergelijk gewichtje 'geladen met kosmische kracht'. De groeispiraal is zelfgelijkvormig en ziet er op alle schalen hetzelfde uit. Hij kan daarom als een soort van oerfractal worden geïnterpreteerd.

Figuur 4.3. Schelpen en spiralen





Figuur 4.4 Spiraalnevel.



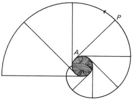
Figuur 4.5 Ashanti goudgewicht.

Spiralen

Er zijn in het platte vlak drie typen spiralen die een speciale naam hebben gekregen. Daarvan is de groeispiraal voor onze doeleinden verreweg de belangrijkste, maar eerst zeggen we iets over de andere twee, de evolvente en de spiraal van Archimedes.

Evolvente Wanneer we een garenklosje afwikkelen en daarbij de draad steeds strak houden, beschrijft het losse uiteinde van de draad een spiraal. Deze staat bekend als de evolvente of *afwikkelingslijn* van de cirkel. De evolvente uit figuur 4.6 is het resultaat van het programma WIKKEL.

Figuur 4.6 Afwikkelingslijn van een cirkel.



Evenals andere programma's voor spiralen berust het programma WIKKEL op het gebruik van *poolcoördinaten* r en ϕ, soms een handig alternatief voor de cartesische coördinaten x en y. Als P een punt is met coördinaten (x,y) ten opzichte van een cartesisch assenstelsel XOY (figuur 4.7), dan is r gelijk aan OP, de afstand van P tot de oorsprong O, en ϕ de hoek die OP met de positieve X-as maakt. Dus $r = OP$, ϕ = hoek POQ. Men noemt r de voerstraal en ϕ de poolhoek.

Het verband tussen de twee soorten coördinaten kan uit figuur 4.7 worden afgelezen als:

$$x = r \cos \phi \quad , \quad y = r \sin \phi$$

Omgekeerd geldt met de stelling van Pythagoras:

$r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$

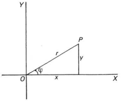
Men rekent r altijd positief. De poolhoek ϕ rekent men vanaf nul op de positieve X-as toenemend in de richting tegen de wijzers van de klok in. Eén volledige rondgang komt overeen met een toename van ϕ met 2π radialen.

De wiskundige beschrijving van de cirkelevolvente is helaas wat gecompliceerd. Als in figuur 4.6 *A* met poolcoördinaten (a,ϕ) een punt is van de af te wikkelen cirkel, dan bevindt het losse punt *P* van de draad zich in de positie:

$x = a(\cos\phi + \phi\sin\phi)$
$y = a(\sin\phi - \phi\cos\phi)$

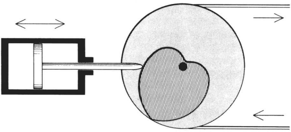
Op het bewijs van die formules gaan we niet in, de computer hoeft ze uiteindelijk toch alleen maar toe te passen. En daar heeft hij geen enkele moeite mee!

Figuur 4.7 Poolcoördinaten.



Spiraal van Archimedes Wellicht de eenvoudigste spiraal is de spiraal van Archimedes (figuur 4.8; verkregen met het programma ARCHI). De groeven van een grammofoonplaat en de windingen van een opgerold lint vormen zo'n spiraal. Kenmerkend is dat er altijd een begin is en dat de windingen overal even ver van elkaar verwijderd zijn. De spiraal van Archimedes kan daarom ook worden opgevat als het resultaat van een draaiende beweging (eenparige cirkelbeweging) in combinatie met een gelijkmatig voortgaande rechtlijnige beweging (eenparig rechtlijnige beweging). Stelt u zich bij voorbeeld maar eens voor dat er een mier met constante snelheid van het middelpunt van een grammofoonplaat langs een rechte lijn naar de rand loopt. Laten we de plaat met wandelende mier nu op een draaitafel ronddraaien, dan zien wij, stilstaande waarnemers, de mier volgens een archimedische spiraal bewegen. De wiskundige beschrijving van deze spiraal in poolcoördinaten drukt dit eenvoudig uit met de formule $r = a\phi$. Na één rondgang is de poolhoek ϕ met 2π toegenomen, terwijl de voerstraal r dan $2\pi a$ langer is geworden, precies de constante afstand tussen twee windingen.

Figuur 4.8 Spiraal van Archimedes.



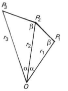
Figuur 4.9 Omzetting van een draaiende in een heen-en-weergaande beweging.

Alle archimedische spiralen zijn onderling gelijkvormig. Het enige verschil is de schaal. Er bestaat dus eigenlijk maar één archimedische spiraal.
In figuur 4.9 zien we hoe met een archimedische spiraal uit een ronddraaiende beweging een gelijkmatig heen en weer gaande beweging kan worden afgeleid. Op een ronde draaiende schijf zijn gespiegeld ten opzichte van elkaar twee boogdelen van een archimedische spiraal geplaatst. De erdoor bestuurde stift gaat dus gelijkmatig heen en weer. Dit wordt onder andere toegepast in naai- en spinmachines.

Groeispiraal De voor ons belangrijkste spiraal is de groeispiraal, reden genoeg om daar wat meer aandacht aan te besteden. De groeispiraal wordt ook wel logaritmische spiraal genoemd, een benaming die te danken is aan de wiskundige beschrijving. De spiraal van Archimedes wordt beschreven door de formule $r = a\phi$. Door daarin r te vervangen door log r krijgen we de formule voor de groeispiraal, dus $\log r = a\phi$.

Wiskunde van de groeispiraal

Figuur 4.10 Drie opeenvolgende punten van een logaritmische spiraal.

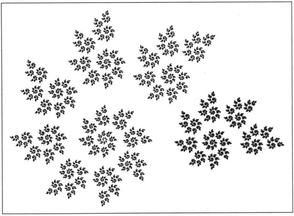


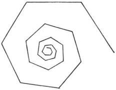
In figuur 4.10 zijn drie opeenvolgende punten P_1, P_2 en P_3 van de spiraal om O getekend. De voerstralen hebben we daarin gemakshalve even r_1, r_2 en r_3 genoemd.
Als we eerst eens even aannemen dat de spiraal archimedisch zou zijn, dan vormen r_1, r_2, r_3, ... een rekenkundige rij. Dat betekent dat het verschil $r_2 - r_1$ gelijk is aan het verschil $r_3 - r_2$. Bovendien is dan het rekenkundig gemiddelde van r_1 en r_3 gelijk aan r_2, dus $r_2 = (r_1+r_3)/2$.
De figuur is echter getekend voor een logaritmische spiraal en dat houdt in dat we in de zojuist gegeven beschrijving r_1, r_2 en r_3 moeten vervangen door hun logaritmen. Dus nu vormen $\log r_1$, $\log r_2$, $\log r_3$, ... een rekenkundige rij, ofwel $\log r_3 - \log r_2 = \log r_2 - \log r_1$, enzovoort. Uit deze laatste gelijkheid volgt dat $\log(r_3/r_2) = \log(r_2/r_1)$ en dus $r_3/r_2 = r_2/r_1$, wat een kenmerk is van een meetkundige rij. Bovendien is $r_2^2 = r_1 r_3$ of $r_2 = \sqrt{r_1 r_3}$, zodat r_2 het meetkundig gemiddelde is van r_1 en r_3. Kortom, de voerstralen van opeenvolgende punten P_1, P_2, P_3, ... waarvoor de poolhoeken telkens met een constant bedrag toenemen, vormen bij de logaritmische spiraal een meetkundige rij. De voerstralen nemen daarbij telkens met een constante factor toe of af, al naar gelang de richting waarin de spiraal wordt afgelopen.
Kijken we nog eens naar figuur 4.10, dan kunnen we nu vaststellen dat $OP_1 : OP_2 = OP_2 : OP_3$. Elementaire meetkundige overwegingen leiden dan tot de conclusie dat de driehoeken OP_1P_2 en OP_2P_3 gelijkvormig zijn, en datzelfde geldt natuurlijk voor alle volgende driehoeken. We zeggen dat driehoek OP_2P_3 is ontstaan uit driehoek OP_1P_2 door een gelijkvormigheidstransformatie, een combinatie van een draaiing om het centrum O en een schaalverandering. Die

schaalverandering kan een vergroting zijn, zoals in figuur 4.10 ($r_2 > r_1$), maar natuurlijk ook een verkleining ($r_2 < r_1$) en zelfs kan alles even groot blijven ($r_2 = r_1$). In het eerste geval spiraliseert de puntenrij P_1, P_2, P_3,... naar oneindig, in het tweede geval convergeert de puntenrij naar het centrum O, maar blijft eeuwig spiraliseren. In het derde geval liggen de punten gewoon op een cirkel.
In het programma LOGSPIRA gebruiken we niet de formule $\log r = a\phi$, maar de daaraan gelijkwaardige formule $r = \exp(a\phi)$. De aard van de spiraal hangt dan af van het teken van a:

$a > 0 \rightarrow$ spiraliserend naar oneindig,
$a < 0 \rightarrow$ spiraliserend naar het centrum,
$a = 0 \rightarrow$ cirkel.

De groei- of krimpfactor hangt af van de verandering van de poolhoek ϕ. Neemt ϕ telkens toe met stapjes α, dan verandert de voerstraal r steeds met de factor $\exp(a\alpha)$. We kunnen de puntenrij P_1, P_2, P_3 uit figuur 4.10 en de voortzetting daarvan dan ook zien als de posities van een schip dat op volle zee om een vuurtoren in O heenvaart. De kapitein zet in P_1 een koers uit door te varen in een richting die een vaste hoek β maakt met de lijn vuurtoren-schip. Het schip vaart een tijdje rechtuit en komt dan in P_2. De hoek tussen de lijn vuurtoren-schip en de vaarrichting is inmiddels aangegroeid van β tot $\beta + \alpha$, zodat de koers moet worden bijgesteld. In P_3 herhaalt zich het gebeuren, enzovoort.
Het hangt van de waarden van α en β af of het schip tot de vuurtoren zal naderen of zich er juist van zal verwijderen. In het grensgeval vaart het schip volgens een cirkel om de vuurtoren heen. Die situatie doet zich in figuur 4.10 voor wanneer driehoek OP_1P_2 gelijkbenig is. In dat geval is $\alpha + 2\beta = \pi$. Hieruit volgt dat voor $\alpha + 2\beta < \pi$ de baan convergeert tot de vuurtoren en voor $\alpha + 2\beta > \pi$ divergeert naar het oneindige. Dat laatste is natuurlijk alleen

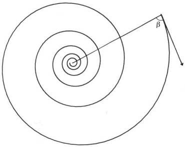




Figuur 4.11 Gebroken logaritmische spiraal.

mogelijk op een natte en platte planeet van oneindig grote afmetingen, maar in de wiskunde is, evenals in de science fiction, veel mogelijk.
Met behulp van het programma LOGSPIRA is zo'n vaarroute getekend (figuur 4.11). Daarbij nadert het schip spiraliserend de vuurtoren. Herhalen we hetzelfde programma voor steeds kleinere waarden van α, dan wordt de baan op den duur zo glad dat hij niet meer van een echte wiskundige spiraal is te onderscheiden (figuur 4.12).

Figuur 4.12 Logaritmische spiraal of groeispiraal.



Ten slotte vaart het schip een zuivere spiraalbaan waarbij de hoek tussen vaarrichting en de lijn vuurtoren-schip niet verandert en een constante waarde β heeft. De kapitein moet daarbij voortdurend bijsturen.
Voor een eventuele wiskundige analyse is het nuttig te weten hoe β afhangt van de coëfficiënt a in de formule:

$$r = r_0 e^{a\phi}$$

Vergeleken met de vorige formule is er een schaalfactor r_0 aan toegevoegd. Dat houdt in dat we ϕ tellen vanaf 0, wanneer r de waarde r_0 heeft. De bewuste formule luidt $\beta = 1/2\pi + \arctan a$. Ook hieruit volgt weer dat voor $\beta < 1/2\pi$ overeenkomend met $a < 0$ het schip een convergente naar binnen draaiende spiraal volgt en voor $\beta > 1/2\pi$ een divergente naar buiten draaiende spiraal.

Eadem mutata resurgo De logaritmische spiraal heeft wiskundigen en kunstenaars steeds geboeid. De beroemde Zwitserse wiskundige Jacob Bernoulli (1654-1705) wijdde er een diepgaande studie aan en sprak van 'spira mirabilis', de wonderbaarlijke spiraal.
Het grootste wonder vond Bernoulli de zelfgelijkvormigheid, de eigenschap dat de spiraal er op elke schaal precies eender uitziet. Hij merkte op dat een schaalverandering, dat wil zeggen een verkleining of een vergroting, van de spiraal ten opzichte van het centrum hetzelfde is als een draaiing van de spiraal als geheel. Die eigenschap vloeit rechtstreeks voort uit de wiskundige formulering. Draaiing van de spiraal over een hoek γ betekent namelijk dat we

ϕ moeten vervangen door $\phi - \gamma$. De gedraaide spiraal wordt dan beschreven door:

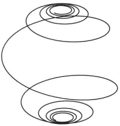
$$r = \exp a(\phi - \gamma) = (r_0 e^{-a\gamma}) e^{a\phi}$$

De resulterende formule verschilt van de uitgangsformule alleen in de schaalfactor $\exp(-a\gamma)$, dat wil zeggen dezelfde spiraal op een andere schaal. Bernoulli beschouwde deze eigenschap als zó iets wonderbaarlijks dat hij op zijn graf in de Münsterkerk van Bazel het opschrift 'eadem mutata resurgo' (hoewel veranderd, zal ik als dezelfde herrijzen) liet aanbrengen.

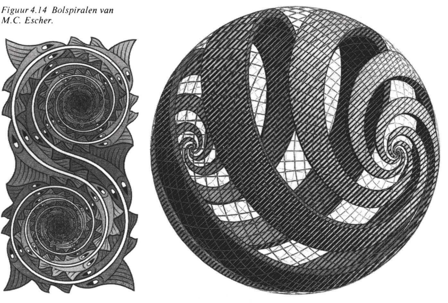
Bolspiraal

We keren nog even terug tot het beeld van het varende schip op een met water overdekte planeet, maar ditmaal nemen we, meer realistisch, aan dat de planeet net als onze aarde bolvormig is. Weer laten we het schip ten opzichte van een vast punt een vaste koers volgen. Voor dat punt kiezen we gemakshalve de noordpool. We kunnen ons dan bedienen van zeekaarten in mercatorprojectie. Bij mercatorprojectie, zo genoemd naar de beroemde Zuidnederlandse cartograaf Gerard Kremer (1512-1594), worden alle hoekmaten op het boloppervlak zonder vervorming afgebeeld op het platte vlak, de kaart. Zoals bekend, heeft die methode het bezwaar dat gebieden in de poolstreken veel groter worden afgebeeld dan even grote gebieden bij de evenaar.
Een mercatorprojectie kunnen we ons voorstellen als een projectie van een boloppervlak op een de bol omringende cilindermantel. Daarbij komen de polen in het oneindige terecht. Knippen we de cilindermantel in de lengterichting open en rollen we het oppervlak af in het platte vlak, dan krijgen we een oneindig lange verticale strook als een mercatorkaart van het totale boloppervlak.
De baan van een schip dat een vaste koers vaart, dat wil zeggen waarbij de meridianen onder een constante hoek worden gesneden, ziet er op de kaart uit als een rechte lijn. Om het bezwaar op te heffen dat de kaart links en rechts bij dezelfde meridiaan ophoudt, herhalen we de verticale strook naar links en naar rechts op dezelfde wijze. Aldus ontstaat er, althans in theorie, een oneindige reeks van in elkaar doorlopende identieke mercatorkaarten. Een vaarroute als een schuine rechte lijn kan dus in zijn geheel op dit kaartenstelsel worden weergegeven. Wanneer we die route op het boloppervlak volgen ontstaat er een spiraalvormige kromme, een zogenaamde bolspiraal of loxodroom. De bolspiraal loopt van pool tot pool met oneindig veel windingen die bij de polen steeds kleiner worden. In figuur 4.13 is een bolspiraal afgebeeld volgens het programma BOLSPIRA.
De grafische kunstenaar M.C. Escher (1898-1972) heeft in 1958 van die bolspiralen een fraaie prent gemaakt (figuur 4.14). Daarop lopen vier banden spiraalsgewijs van noord naar zuid, maar bij de

Figuur 4.13 Bolspiraal.



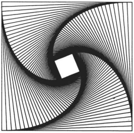
Figuur 4.14 Bolspiralen van M.C. Escher.

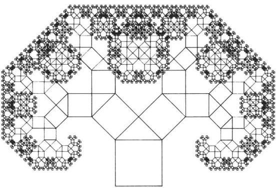


polen is Escher toch iets afgeweken van de mathematische realiteit, oneindig veel windingen.

Bolspiralen ontstaan ook wanneer we twee schepen laten varen, bij voorbeeld een koopvaarder en een piraat, waarbij de piraat in de richting van de koopvaarder vaart en de koopvaarder in een vaste koers de piraat probeert te ontwijken. De schepen zullen dan spiraalsgewijs om elkaar heen draaien waarbij de onderlinge afstand òf steeds groter, òf steeds kleiner wordt.
Hier gaan we wat uitvoeriger in op een soortgelijke situatie in het platte vlak. We stellen ons voor dat vier honden *A*, *B*, *C* en *D* elkaar met dezelfde snelheid achterna zitten. In het begin bevinden ze zich op de hoekpunten van een vierkant. *A* loopt in de richting van *B*, *B* in die van *C*, *C* in die van *D*, terwijl *D* weer *A* achterna zit. Het blijkt dat de honden volgens logaritmische spiralen lopen die elkaar in het centrum van het vierkant ontmoeten, na oneindig vaak om elkaar heen gedraaid te hebben.
De in figuur 4.15 weergegeven uitbeelding daarvan is echter op een enigszins andere wijze ontstaan. Het vierkant is daar telkens onderworpen aan een zelfde gelijkvormigheidstransformatie waarbij het telkens op zodanige wijze gedraaid en verkleind is, dat de hoekpunten van het getransformeerde vierkant op de zijden van het oorspronkelijke vierkant liggen. Het computerprogramma voor figuur 4.15 is te vinden onder de naam WERVEL.

Figuur 4.15 Vierkante draaikolk.





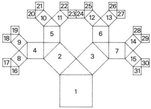
Figuur 4.16 Boom van Pythagoras.

Boom van Pythagoras

In 1957 verscheen onder de titel *Het wondere onderzoekingsveld der vlakke meetkunde* een opmerkelijk boek. De schrijver A.E. Bosman (1891-1961) deed daarin een poging zijn verwondering over de wonderlijke meetkundige vormen van de ons omringende natuur op de jonge mensen over te brengen. Het spiraalmotief neemt er een grote plaats in. De omslag is al getooid met een afbeelding van het spiraliserend binnenwerk van een Nautilusschelp. Als schoolboek had het geen succes. Het was ook veel meer een essay. Wanneer Bosman nu zou hebben geleefd en gewerkt, zou hij wellicht in de computer-art een belangrijke positie hebben ingenomen. Een van Bosmans meest opmerkelijke figuren is de boom van Pythagoras, door hem getekend tijdens de Tweede Wereldoorlog op dezelfde tekentafel waarop ook ontwerpen van duikboten werden vervaardigd. Nu, enige decennia later, kunnen we zijn ontwerp binnen enkele minuten op het beeldscherm van een computer laten verschijnen. Figuur 4.16 is een met de plotter vervaardigde versie. Zoals we in het eerste hoofdstuk hebben gezien, berust de constructie van zo'n boom op het tweetallig talstelsel. Nummeren we de vierkanten als in figuur 4.17, dan zien we dat een vierkant met een willekeurig rangnummer n een gelijkbenige rechthoekige driehoek draagt waaruit twee kleinere vierkanten ontspruiten. De linker draagt het rangnummer $2n$, een even getal, en de rechter het rangnummer $2n+1$, een oneven getal. Samen vormt dit drietal een meetkundige uitbeelding van de stelling van Pythagoras, die zegt dat de kleinere vierkanten samen net zo groot zijn als het grotere vierkant. Omdat de kleinere vierkanten hier gelijk zijn, is elk dus half zo groot als de gemeenschappelijke voorganger. Als het beginvierkant een oppervlakte 1 heeft, dan zijn de nummers 2 en 3 samen net zo groot en dat geldt zo voortgaand voor elke kleinere serie. In figuur

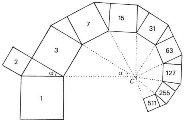
4.17 zijn de acht vierkanten 8, 9, 10, ..., 15 dus met elkaar net zo groot als het eerste basisvierkant.
De positie van een willekeurig vierkant met rangnummer n hangt af van de deelbaarheidseigenschappen van n door 2. Zo neemt nummer 13 ten opzichte van nummer 6 een rechterpositie in, nummer 6 ten opzichte van nummer 3 een linkerpositie en ten slotte nummer 3 ten opzichte van nummer 1 een rechterpositie. Dat kunnen we ook aflezen uit de schrijfwijze van 13 in het tweetallig talstelsel: 13 = 1 1 0 1. Van rechts naar links tellen we af: 1 (rechts), 0 (links), 1 (rechts). De meest linkse 1 tellen we niet mee. In het hierop gebaseerde programma PYTHB1 worden de vierkanten seriegewijs getekend: 1; 2, 3; 4, 5, 6, 7; 8, 9, ..., 15; enzovoort. Een vierkant met rangnummer n wordt volgens de binalen van n uit het basisvierkant door een rij van gelijkvormigheidstransformaties afgeleid. Het programma bevat veel rekenwerk en is derhalve enigszins traag, zeker wanneer men bij voorbeeld tot de orde 10 wil gaan. Er moeten dan $2^{11} - 1$ vierkanten worden getekend!

Figuur 4.17 Begin van de boom van Pythagoras.

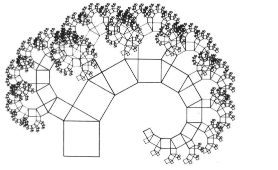


Er zijn dan ook betere methoden om hetzelfde te bereiken. Als een soort vuistregel geldt dat besparing van rekenwerk ten koste gaat van de beschikbare geheugenruimte. In het iets algemenere programma PYTHB2 is die besparing verkregen door gebruik te maken van de zogenaamde backtrack-methode, een vernuftige en doelmatige techniek welke in het volgende hoofdstuk wordt behandeld. Met het genoemde programma kan ook een zogenaamde scheve boom gemaakt worden. Bovendien gaat daarbij het tekenen net zolang door tot de kleinste vierkanten beneden een van tevoren vastgestelde drempel gekomen zijn. De met deze methode opgestelde programma's zijn snel en stellen bescheiden eisen aan de geheugenruimte.

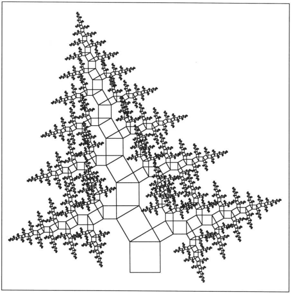
Figuur 4.18 Logaritmische spiraal in een scheve boom van Pythagoras.



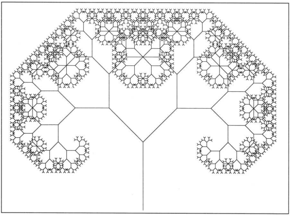
Scheve boom De boom van Pythagoras kan op vele manieren worden gevarieerd en uitgebreid. Een voor de hand liggende generalisatie, ook al door Bosman getekend, is een scheve boom waarbij een vierkant wordt gevolgd door een willekeurige rechthoekige driehoek. Het basisdrietal is geschetst in figuur 4.18, gelijk met de krul gevormd door telkens met het rechtervierkant verder te gaan. De krul is een echte logaritmische spiraal, bepaald door een herhaalde gelijkvormigheidstransformatie. Het centrum C van de spiraal is in figuur 4.18 aangegeven. Die gelijkvormigheidstransformatie **R** is een draaiing over de hoek $-\alpha$, die van de ongelijkbenige driehoek, in combinatie met een verkortingsverhouding $\cos \alpha$. Aan de in figuur 4.18 niet getekende linkerkant werkt op analoge wijze een andere gelijkvormigheidstransformatie **L**, een draaiing over de hoek $\pi/2 - \alpha$ in combinatie met een verkorting van $\sin \alpha$.
De boom van Pythagoras is een fraai voorbeeld van een mathematische fractal, een zelfgelijkvormige figuur waarbij elk vierkant weer kan worden opgevat als de stam van een complete boom. Die zelfgelijkvormigheid kunnen we hier preciseren door te zeggen dat zowel de linkerdraaiing **L** als de rechterdraaiing **R** de boom in zichzelf overvoert. Het enige effect is een soort opschuiven van vierkantjes en dat merken we bij de stam. Aan de toppen, bij de allerkleinste vierkantjes, merken we helemaal niets. De vierkanten met de rangnummers 1, 2, 4, 8, 16, ..., dat wil zeggen machten van 2, vormen een spiraal die convergeert tot het centrum van **L**. Onderwerpen we die figuur aan de transformatie **R**, dan komt er een tweede spiraal, en wel die van de vierkanten 3, 6, 12, 24, 48, ... Die tweede spiraal is ook een onderdeel van de boom. We kunnen het nog eens doen, of beter nog, we kunnen de oorspronkelijke spiraal onderwerpen aan een willekeurige combinatie van **L** en **R** transformaties. Elke combinatie levert weer een spiraal als onderdeel van de boom. Zo constateren we dat de boom van Pythagoras vol zit met spiralen, oneindig veel. In afbeeldingen van de bomen zijn ze soms moeilijk te ontdekken, omdat in de verdere stadia van wording de spiraliserende vierkanten elkaar steeds overdekken. In figuur 4.19 is met het programma PYTHB2 een scheve boom getekend met de keuze $\alpha = \pi/6$ (30°).



Figuur 4.19 Scheve boom van Pythagoras.



Figuur 4.20 Alternerende boom van Pythagoras.



Figuur 4.21 Takkenboom van Pythagoras.

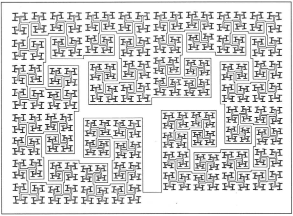
Andere varianten Bosman is ook op het idee gekomen om de vierkanten te vervolgen met een ongelijkbenige driehoek, afwisselend in gewone en gespiegelde vorm. Het resultaat is figuur 4.20. Het gebruikte programma is PYTHB3.

De boom van Pythagoras kunnen we vereenvoudigen door in plaats van vierkanten alleen maar lijnstukjes te tekenen die elkaar in het hart van de driehoeken ontmoeten. De driehoeken zelf vervallen

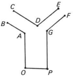
dan. Zo krijgen we een wat kale boom (figuur 4.21). Hiervoor kan bijna hetzelfde computerprogramma worden gebruikt als voor de gewone boom. Het is in appendix B te vinden als PYTHT.
In Mandelbrots boek staan nog andere varianten van de boom van Pythagoras, zoals figuur 4.23. Die variant berust op de stamvorm van figuur 4.22. Tussen de punten *A* en *B* en tussen de punten *E* en *F* zitten de aanhechtingsplaatsen voor de zijtakken die gelijkvormige kopieën zijn van de stam. Het desbetreffende programma BOOMM is een variant van PYTHB3. In dat programma worden de takken telkens gewoon en gespiegeld aangebracht. Bovendien zijn de parameters zo gekozen dat de figuur in de limiet vlakvullend is.
Ten slotte een wat realistischer fractalboom (figuur 4.25). Net als bij Mandelbrots boom berust de constructie op een model van een stam met aanhechtingsplaatsen voor de zijtakken (figuur 4.24).

Figuur 4.22 Stam van de boom van Mandelbrot.

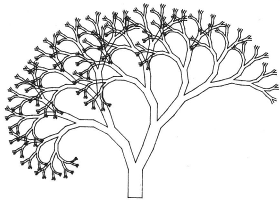
Figuur 4.23 Boom van Mandelbrot.



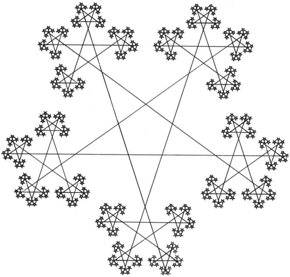
Figuur 4.24 Model voor een realistische boom.



Figuur 4.25 Realistische boom.



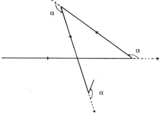
Figuur 4.26 Sterfractal.

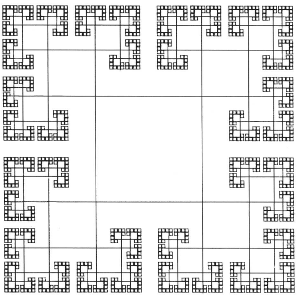


Sterren

In figuur 4.26 is een sterfractal afgebeeld. Deze bestaat uit een centrale stervijfhoek, een pentagram, die wordt omkranst door vijf kleinere exemplaren. Elk van die vijf kleinere pentagrammen draagt aan de vier vrije punten weer kleinere pentagrammen en zo gaat het, althans in theorie, eindeloos door. De ontstane sterfractal heeft weer het kenmerk van de zelfgelijkvormigheid. Ook zijn er gebroken spiralen in te herkennen. In de praktijk van het tekenen met een beperkte precisie moeten we na een paar stappen ophouden. Figuur 4.26 toont vijf fasen en telt met zijn vier achtereenvolgende verkleiningen al 1280 lijntjes!

Figuur 4.27 Schema van de sterfractal.





Figuur 4.28 Vierkante sterfractal.

Deze sterfractal is opgebouwd als één zich sluitende gebroken lijn waarbij opeenvolgende lijnstukjes steeds eenzelfde hoek α met elkaar maken. In figuur 4.27 is een fragmentje geschetst met $\alpha = (4\pi)/5$ (144°). De lijnstukjes van figuur 4.26 denken we genummerd van $n = 0$ tot $n = 1279$. Heeft het eerste lijnstukje met rangnummer $n = 0$ de richting $\phi = 0$, dan heeft het lijnstukje met een willekeurig rangnummer n dus de richting $n\alpha$. Het enige dat van belang is, is een voorschrift dat ons vertelt wat de lengte van het n-de lijnstuk is. Er zijn in dit geval vijf verschillende lengten: 1, r, r^2, r^3, r^4, waarbij r een reductiefactor is (in figuur 4.26 gelijk aan 0.35). Het voorschrift dat aan figuur 4.26 ten grondslag ligt is als volgt:

n = 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, ...	lengte r^4,
n = 4, 8, 12, 20, 24, 28, 36, 40, 44, 52, ...	lengte r^3,
n = 16, 32, 48, 80, 96, 112, ...	lengte r^2,
n = 64, 128, 192, 320, 384, 448, ...	lengte r,
n = 0, 256, 512, 768, 1024, ...	lengte 1.

Zoals hieruit is af te lezen, hangt de lengte van het lijnstuk met rangnummer n af van het aantal factoren 4 in n. Het is nu niet moeilijk meer om het voorschrift te generaliseren, zodat we ook andere sterfractals kunnen tekenen. Het aantal fases noemen we p en in plaats van 4 nemen we een willekeurig getal v. Het algemene voorschrift is nu:

n heeft geen factor v	lengte r^{p-1},
n heeft één factor v	lengte r^{p-2},
n heeft twee factoren v	lengte r^{p-3},
n heeft drie...	
.....	
n heeft minstens $p-1$ factoren v	lengte 1.

In de algemene situatie tellen we van 0 tot $(v+1)v^{p-1}$. Er zijn dan precies $v+1$ lijnstukken met de grootste lengte 1, $(v+1)(v-1)$ met de lengte r, $(v+1)(v^2-v)$ met de lengte r^2, enzovoort. Figuur 4.26 was dus geconstrueerd met $P=5$, $v=4$, $\alpha=4\pi/5$ en $r=0.35$. Een heel andere illustratie (figuur 4.28) krijgen we met $P=7$, $v=3$, $\alpha=\pi/2$ en $r=0.47$. Beide figuren zijn vervaardigd met hetzelfde computerprogramma STER. Daarin kunnen voor p, v, α en r willekeurige waarden worden genomen.

De analyse van een fractal

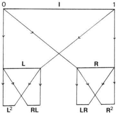
Fractals zijn meetkundige figuren met een ingebouwde zelfgelijkvormigheid. In dit hoofdstuk geven we hieraan een precieze betekenis. Het zal blijken dat fractals gedefinieerd kunnen worden als puntverzamelingen die invariant zijn voor een halfgroep van contracties. Een wiskundige definitie waaraan wel het een en ander is uit te leggen. Met invariant ten opzichte van een transformatie wordt bedoeld dat wanneer P een punt van de fractal is, ook het getransformeerde punt van P tot de fractal behoort. In het eenvoudigste geval is een contractie een schaalverkleining (centrale vermenigvuldiging), al of niet gecombineerd met een draaiing. Dergelijke gelijkvormigheidstransformaties hebben we al bij spiralen leren kennen. Hier beschouwen we ze nog eens, maar dan geplaatst in een algemeen kader.
Transformaties worden genoteerd met een hoofdletter, dus bij voorbeeld **L** of **R**. Een combinatie van twee transformaties **L** en **R** is weer een transformatie en wordt geschreven als een produkt dat van rechts naar links moet worden gelezen, bij voorbeeld **RL** (eerst **L** dan **R**) of **LR** (eerst **R** dan **L**). Anders dan bij gewone produkten van getallen, is hier de volgorde van belang. Herhaling van dezelfde transformatie wordt genoteerd als een macht, dus $\mathbf{L}^2$ voor **LL** en $\mathbf{R}^3$ voor **RRR**. Het is handig de letter **I** te reserveren voor de identieke transformatie. Dat is de transformatie waarbij alles op zijn plaats blijft.
Alle transformaties, inclusief **I**, die ontstaan door **L** en **R** op allerlei manieren te combineren, worden in de wiskunde samengevat in het begrip halfgroep. Vooruitlopend op wat later in dit hoofdstuk hierover wordt gezegd, geven we een eenvoudig voorbeeld dat ondanks zijn eenvoud representatief is voor een veel algemenere situatie.
We beschouwen nogmaals de cantor-verzameling die in hoofdstuk 2 al uitvoerig aan de orde is gekomen. Die verzameling bestaat uit losse punten die in het drietallig talstelsel kunnen worden geschreven als oneindige breuken met alleen nullen en tweeën. Bij voorbeeld $x = 0.02022022202....$
Ieder punt x van het lijnstuk $[0,1]$ denken we nu onderworpen aan twee contracties:

$\mathbf{L}$: $x \rightarrow \frac{x}{3}$ dus $[0,1] \rightarrow [0, \frac{1}{3}]$

$\mathbf{R}$: $x \rightarrow \frac{2}{3} + \frac{x}{3}$ dus $[0,1] \rightarrow [\frac{2}{3}, 1]$

In woorden: **L** voert een punt x over in $x/3$, terwijl **R** een punt x overvoert in $2/3 + x/3$. **L** is dus een centrale vermenigvuldiging met centrum $x = 0$ en factor $1/3$. Het interval [0,1] gaat daardoor over in het interval [0,1/3]. Het wordt dus verkort. **R** verschilt van **L** alleen in het centrum van vermenigvuldiging dat bij **R** 1 is. In figuur 5.1 is een en ander nog eens meetkundig weergegeven.

Figuur 5.1 Schema van gecombineerde transformaties.



Schrijven we x drietallig als $0.c_1c_2c_3c_4...$, dan geldt:

$\mathbf{L}\,x = 0.0c_1c_2c_3c_4...$
$\mathbf{R}\,x = 0.2c_1c_2c_3c_4...$

De rij wijzergetallen (cijfers achter de punt) schuift dus één plaats naar rechts en wordt links aangevuld met een 0 of een 2. Behoort x tot de puntverzameling van Cantor, dan behoren ook **L**x en **R**x daartoe. De verzameling als geheel wordt dus door **L** op een deel van zichzelf afgebeeld. Datzelfde geldt ook voor **R** en eveneens voor alle combinaties van **L** en **R**, de halfgroep waarvan **L** en **R** de voortbrengers zijn. Die eigenschap wordt aangeduid met de term 'invariant' wat onveranderlijk betekent. Omgekeerd kunnen we zeggen dat de verzameling van Cantor geheel is bepaald door die eigenschap van invariant zijn voor twee contracties en al hun combinaties.
Dit principe zal buitengewoon vruchtbaar blijken te zijn voor het fractalbegrip. In dit hoofdstuk analyseren we aldus de boom van Pythagoras, de kromme van Lévy en de kromme van Von Koch. Overigens beginnen we dit hoofdstuk met een beschouwing over het dimensiebegrip, de zogenaamde capaciteit. Ook daarbij gaan we iets meer op de wiskundige details in.

De dimensie van een fractal

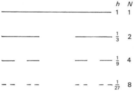
In 1977 introduceerde Mandelbrot het begrip fractal tegelijk met de 'fractal dimension', een dimensiebegrip dat hij baseerde op een in 1919 door Hausdorff gegeven definitie. De door Mandelbrot gebruikte dimensie is daar een vereenvoudiging van en stemt geheel overeen met een in 1958 door Kolmogorov gegeven definitie van de 'capaciteit' van een meetkundige figuur. Omdat het begrip dimensie in de literatuur verschillende betekenissen heeft – wiskundigen hanteren nog minstens vier andere definities – houden wij vast aan de terminologie van Kolmogorov en spreken dus van capaciteit.
We definiëren eerst de capaciteit van een puntverzameling op een rechte lijn, de getallenlijn. Daarbij kunnen we als voorbeeld de puntverzameling van Cantor in gedachten nemen. Het idee van

Kolmogorov is om zo'n puntverzameling met een steeds kleinere meet-eenheid h te meten, net als bij de in hoofdstuk 3 beschouwde kustlijn. Daartoe denken we de punten zo zuinig mogelijk overdekt door lijnstukjes van de lengte h. Het kleinste aantal lijnstukjes dat nodig is noemen we $N(h)$. Dat is een functie van h. Bij een volgende meting met een kleinere h verandert dus N mee en wordt natuurlijk groter. De *capaciteit* wordt nu gedefinieerd als:

$$\text{(A)}\quad D = \lim_{h \to 0} \frac{\log N(h)}{\log \left(\frac{1}{h}\right)}$$

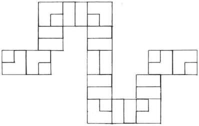
Die definitie stemt blijkbaar overeen met de overeenkomstige definitie in hoofdstuk 3. Alleen heeft de definitie hier betrekking op punten op een rechte lijn, terwijl het in hoofdstuk 3 ging om een kronkellijn in een plat vlak.
Om de definitie toe te passen op de puntverzameling van Cantor, kijken we nog eens naar de verschillende stadia van de constructie (figuur 5.2). We gaan uit van een lijnstuk met lengte 1. We kunnen dit het beste overdekken (dus meten) door precies één lijnstuk te nemen dat ook een lengte 1 heeft. In de volgende fase, te tellen als de eerste, wordt het geheel door twee lijnstukken met lengte 1/3 overdekt. Vervolgens is $h = 1/9$ met $N = 4$, dan $h = 1/27$ of 3^{-3} en $N = 8$ of 2^3. In de n-de fase is dan $h = 3^{-n}$ en $N = 2^n$. Invullen in de formule (A) geeft dan:

Figuur 5.2 Bepaling van de fractal dimensie van de fractal van Cantor.



$$D = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.6309$$

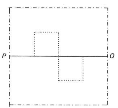
Eigenlijk is dit nog maar een herhaling van de berekening die we in hoofdstuk 3 hebben gemaakt, maar de overeenkomstige berekening in het vlak geeft iets nieuws. Als voorbeeld nemen we de worst van Minkowski die is afgebeeld in figuur 3.9. Daarbij gaan we de overdekking uitvoeren met kleine vierkantjes met zijde h. We leggen de fractal als het ware op ruitjespapier en tellen het aantal hokjes waarin de (hoek)punten van de fractal liggen (figuur 5.3).



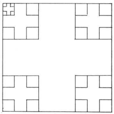
Figuur 5.3 Overdekking van de fractal van Minkowski door vierkantjes.

Noemen we het kleinste aantal vierkantjes van de grootte $h \times h$ dat nodig is om de fractal te overdekken weer $N(h)$, dan geldt formule (A). Dat aantal is in dit geval vrij gemakkelijk te schatten.

Figuur 5.4 Detail van overdekking.



Figuur 5.5 Vierkant analogon van de fractal van Cantor.



Daartoe beschouwen we de n-de fase in de constructie van de worst. Het oorspronkelijke lijnstuk met de lengte 1 is dan vervangen door een kronkellijn met 8^n lijnstukjes van de lengte 4^{-n}. In figuur 5.4 bekijken we zo'n lijnstukje PQ. Alles wat daarbinnen gebeurt bij volgende fases – een kopie van de fractal in miniatuur – kan worden overdekt door het aangegeven vierkant waarvan de zijde dus $h = 4^{-n}$ is. Er zijn 8^n van die lijnstukjes en dus is $N(h) = 8^n$. Formule (A) geeft onmiddellijk het resultaat $\log 8 / \log 4 = 3/2$. De capaciteit van de worst van Minkowski is dus 1.5.

In het algemeen kunnen we voor een in een plat vlak gelegen fractal formule (A) gebruiken mits we $N(h)$ interpreteren als het minimale aantal vierkantjes met zijde h dat nodig is om de fractal geheel te overdekken.

De dimensie, of liever de capaciteit, van een fractal zegt niet zoveel over het uiterlijk van de fractal. Voor een gladde lijn als een cirkel zijn de gewone dimensie en de capaciteit beide in elk geval 1. Een fractal met $0 < D < 1$ bevat zeker geen lijnstukjes en is dus net als de verzameling van Cantor onsamenhangend. Zo'n fractal zou men puntachtig of stoffig kunnen noemen.

Zoals we de cantor-verzameling uit een lijnstuk hebben afgeleid, kunnen we op een overeenkomstige wijze van een vierkant uitgaan. Bij gebruik van coördinatenmeetkunde waarbij de hoekpunten van het vierkant (0,0), (1,0), (0,1) en (1,1) zijn, correspondeert een willekeurig punt van het 'cantor-vierkant' met coördinaten (x,y) waarbij zowel x als y tot de klassieke cantor-verzameling behoren. Het komt erop neer dat zowel de horizontale als de verticale projecties van de fractalpunten uit het vierkant een gewone cantor-verzameling vormen. De constructie kan ook meetkundig worden uitgevoerd (figuur 5.5) door van een vierkant telkens het kruisvormig middengedeelte weg te nemen. Bij de n-de fase zijn er 4^n vierkanten overgebleven waarvan de zijde 3^{-n} is. Uit formule (A) volgt dan $D = \log 4 / \log 3 = 1.2619$.

Een fractal met $1 < D < 2$ zouden we kunnen beschrijven als een dikke lijn, of een lijn die min of meer vlakvullend is. In hoofdstuk 3 hebben we enige aandacht besteed aan de mate van kronkeling (de kronkelwaarde) van een kronkellijn. Voor een lijn als de kromme van Von Koch of die van Minkowski stemt de daar gegeven definitie van de kronkelwaarde overeen met de hier gegeven definitie van capaciteit. Er komen problemen wanneer de fractal het eindstadium is van een oneindige reeks benaderingen en wanneer die benaderingen bij voorbeeld gebroken lijnen zijn die zichzelf herhaaldelijk doorsnijden. Voorbeelden hiervan zijn de kromme van Lévy (figuur 3.19) en de boom van Pythagoras (figuur 4.16). Een nauwkeurige analyse laat zien dat de capaciteit van de kromme van Lévy precies 1 is. Volgens de oorspronkelijke definitie van Mandelbrot zou het geen fractal zijn. En dat is jammer. Het zij echter nog eens gezegd: het essentiële kenmerk van een fractal is de tot in het oneindig kleine doorlopende zelfgelijkvormigheid. De fractal dimensie is maar een bijkomstigheid.

Gelijkvormigheidstransformaties

Bij een aantal gelegenheden hebben we al duidelijk gemaakt dat fractals gekenmerkt zijn door een ingebouwde zelfgelijkvormigheid. Met name bij de spiralen in hoofdstuk 4 hebben we al gewezen op het belang van draaiingen en schaalveranderingen. Hier gaan we er wat systematischer op in.

We beschouwen transformaties, aan te duiden met letters als **T**, **L**, **R**, enzovoort, van punten P, Q, enzovoort, in het platte vlak. Met de notatie $\mathbf{T}(P)$ geven we aan dat de transformatie **T** op het punt P wordt uitgeoefend. Het getransformeerde punt geven we vaak met een accent aan, dus $P' = \mathbf{T}(P)$.

Twee transformaties $\mathbf{T}_1$ en $\mathbf{T}_2$, na elkaar uitgevoerd, leveren een gecombineerde transformatie, te schrijven als $\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1$. Dit moet van rechts naar links worden gelezen, dus eerst $\mathbf{T}_1$ daarna $\mathbf{T}_2$. De volgorde is daarbij van belang, want veelal is $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$ iets anders dan $\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1$. Men noemt dit vermenigvuldigen van twee transformaties en gebruikt er dezelfde notatie voor als bij het vermenigvuldigen van twee gewone getallen. De vermenigvuldiging van **T** met **T**, dus een herhaling van dezelfde transformatie, wordt dan ook niet genoteerd als **TT**, maar als $\mathbf{T}^2$. Op dezelfde manier is $\mathbf{T}^m$ de notatie voor de m-maal herhaalde transformatie. De identiteit, de transformatie die alles op zijn plaats laat, wordt aangegeven met **I**. Heeft **T** bij voorbeeld de meetkundige betekenis van een lijnspiegeling, dan kunnen we met $\mathbf{T}^2 = \mathbf{I}$ op eenvoudige wijze tot uitdrukking brengen dat door een herhaalde spiegeling de oorspronkelijke toestand is hersteld.

Nu zetten we de belangrijkste gelijkvormigheidstransformaties op een rijtje. Dit zijn de rotatie, de schaalverandering of centrale vermenigvuldiging, de draaivermenigvuldiging en de spiegeling. Voor zover het de wiskundige behandeling betreft beperken we ons tot eenvoudige meetkundige beginselen en tot het gebruik van coördinatenmeetkunde, omdat dit van essentieel belang is voor het maken van computerprogramma's.

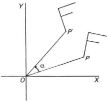
Rotatie

Een rotatie of draaiing is gekenmerkt door een rotatiecentrum of draaipunt en een rotatiehoek. De rotatiehoek wordt altijd gemeten in radialen of graden met de draairichting tegen de wijzers van de klok in als positieve richting. (We memoreren even dat π radialen hetzelfde is als 180°.)

In de coördinatenmeetkunde wordt een rotatie over een hoek α met de oorsprong als centrum (figuur 5.6) beschreven door:

$$x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha$$
$$y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

Figuur 5.6 Rotatie.

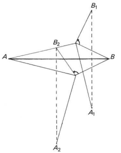


Daarbij zijn x en y de cartesische coördinaten van P ten opzichte van het XOY-stelsel en x' en y' die van het getransformeerde punt P'. De hoek α heet de rotatiehoek.
Met een kleine verandering kunnen we ook een rotatie beschrijven waarvan het punt (x_0,y_0) het draaipunt is:

$$\begin{cases} x' = (x - x_0')\cos\alpha - (y - y_0)\sin\alpha + x_0 \\ y' = (x - x_0)\sin\alpha + (y - y_0)\cos\alpha + y_0 \end{cases}$$

Om die formule op zijn juistheid te toetsen vullen we in de rechterleden voor x en y respectievelijk x_0 en y_0 in. Er komt dan $x' = x_0$ en $y' = y_0$. Dit betekent dat het punt (x_0,y_0) bij de desbetreffende rotatie op zijn plaats blijft en dus het rotatiecentrum is.
Bij wijze van voorbeeld nemen we twee rotaties die we **L** en **R** noemen. **L** is een rotatie om $A(0,0)$ met rotatiehoek $\pi/6$ (30°) en **R** een rotatie om $B(1,0)$ met rotatiehoek $\pi/3$ (60°). In figuur 5.7 kunnen we zien dat de rotatie **L** (links) het lijnstuk AB overvoert in AB_1. Laten we hierop **R** (rechts) volgen, dan gaat AB_1 over in A_2B_2. Dus:

Figuur 5.7 Combinatie van twee rotaties.



$$\mathbf{RL}\ (AB) = A_2B_2$$

Doen we hetzelfde met verwisseling van **L** en **R**, dan is $\mathbf{R}(AB) = A_2B$ en:

$$\mathbf{LR}\ (AB) = A_1B_1$$

Hieruit blijkt al hoe belangrijk de volgorde is bij het samenstellen van rotaties met verschillende centra. Het spreekt bijna vanzelf dat de vermenigvuldiging van twee rotaties in het algemeen weer een rotatie is. Daarvan is de rotatiehoek gelijk aan de som van de rotatiehoeken van de samenstellende componenten. Alleen wanneer die som nul is, is het resultaat een translatie. De problemen zitten echter in de posities van de draaipunten. Er is geen eenvoudige regel die vertelt hoe de rotatiecentra van **RL** en **LR** door **L** en **R** bepaald zijn.
In figuur 5.7 is het dus heel logisch dat A_1B_1 en A_2B_2 evenwijdig en even lang zijn en dat hun ligging ten opzichte van AB over de hoek $\pi/6 + \pi/3 = \pi/2$ (90°) is verdraaid. Volledigheidshalve zijn de rotatiecentra van **RL** en **LR** eveneens in figuur 5.7 aangegeven.
Wat we hier meetkundig hebben gevonden, kunnen we ook afleiden met coördinatenmeetkunde. **L** en **R** worden beschreven door:

$$\mathbf{L}\ \begin{cases} x' = (x\sqrt{3} - y)/2 \\ y' = (x + y\sqrt{3})/2 \end{cases}$$

$$\mathbf{R}\ \begin{cases} x' = (x - y\sqrt{3} + 1)/2 \\ y' = (x\sqrt{3} + y - \sqrt{3})2 \end{cases}$$

Hieruit volgt:

$$\mathbf{RL}\begin{cases} x' = -y + \frac{1}{2} \\ y' = x - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

en

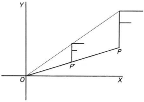
$$\mathbf{LR}\begin{cases} x' = -y + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y' = x - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Hieruit kunnen we aflezen dat **RL** en **LR** draaiingen over $\pi/2$ (90°) zijn, maar dat ze verschillen in de ligging van het rotatiecentrum. Een berekening geeft voor **RL** de positie $((1+\sqrt{3})/4, (1-\sqrt{3})/4)$ en voor **LR** het draaipunt $((1+\sqrt{3})/4, (-1+\sqrt{3})/4)$.

Schaalverandering

Een schaalverandering of centrale vermenigvuldiging is gekenmerkt door een centrum en een schaalfactor c. Is, zoals in figuur 5.8, de oorsprong O het centrum en gaat punt P over in P', dan ligt P' op de lijn OP. Er geldt $OP' = c \cdot OP$.
Bij fractals is meestal $|c| < 1$, zodat de transformatie een contractie is. Een figuurtje in P wordt dan dus verkleind tot een figuurtje in P'.
In de regel is c positief, hoewel er wiskundig gesproken niets op tegen is om c ook negatief te nemen. In dat geval liggen P' en P aan weerskanten van het centrum O. Een heel speciaal geval is $c = -1$ waarbij P' en P ten opzichte van O gespiegelde posities innemen. We spreken dan van een *puntspiegeling*. Deze heel bijzondere transformatie is hetzelfde als een draaiing om O over π (180°).
In de coördinatenmeetkunde wordt een centrale vermenigvuldiging ten opzichte van de oorsprong beschreven door:

Figuur 5.8 Centrale vermenigvuldiging of schaling.



$$x' = cx \quad \text{en} \quad y' = cy$$

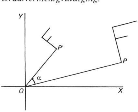
Wanneer we een centrale vermenigvuldiging willen beschrijven met het punt (x_0, y_0) als centrum, dan gebruiken we de formules:

$$x' = c(x - x_0) + x_0$$
$$y' = c(y - y_0) + y_0$$

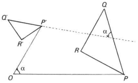
Draaivermenigvuldiging

Dit is de belangrijkste gelijkvormigheidstransformatie, een combinatie van een rotatie en een centrale vermenigvuldiging. We hebben die transformatie al uitvoerig in hoofdstuk 4 behandeld in verband met de logaritmische spiraal en kunnen er daarom kort over zijn.

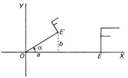
Figuur 5.9
Draaivermenigvuldiging.



Figuur 5.10 Centrum van rotatie van twee gelijkvormige driehoeken.



Figuur 5.11
Draaivermenigvuldiging in coördinaten.



Ook hier zijn de kenmerken een centrum en een schaalfactor die altijd positief kan worden genomen. De draaivermenigvuldiging kan altijd beschouwd worden als het produkt van een rotatie **R** en een centrale vermenigvuldiging **C** met hetzelfde centrum. Het maakt niet uit in welke volgorde dat produkt wordt genomen: **RC** of **CR** (figuur 5.9).

Bij de analyse van een fractal kunnen we het volgende meetkundige probleem tegenkomen. We constateren de aanwezigheid van twee gelijkvormige figuren, bij voorbeeld de driehoeken PQR en $P'Q'R'$ (figuur 5.10). De vraag is nu door welke draaivermenigvuldiging driehoek PQR in $P'Q'R'$ kan worden getransformeerd. De rotatiehoek α is eenvoudig te vinden. Daartoe hoeven we alleen maar op twee overeenkomstige lijnen te letten, bij voorbeeld PQ en $P'Q'$. Moeilijker, maar wel interessanter is de bepaling van het centrum O. We volstaan hier echter met de opmerking dat de positie van O kan worden afgeleid uit het gegeven dat hoek $P'OP$ gelijk is aan α en dat $OP' : OP = Q'P' : QP = c$.

In de coördinatenmeetkunde wordt een draaivermenigvuldiging met de oorsprong O als centrum beschreven door:

$$\begin{cases} x' = ax - by \\ y' = bx + ay \end{cases}$$

De betekenis van de coëfficiënten a en b wordt duidelijk aan de hand van figuur 5.11 waarin E het punt (1,0) is. Uit de formules blijkt dat dit punt getransformeerd wordt in E' met coördinaten (a,b). De verkortingsverhouding van de transformatie is dus $OE'/OE = \sqrt{a^2 + b^2}$. De rotatiehoek α voldoet aan $\cos \alpha = OA/OE' = a/\sqrt{a^2 + b^2}$ en $\sin \alpha = AE'/OA = b/\sqrt{a^2 + b^2}$.

Nu nog een klein stapje en we hebben de formules voor de algemene draaivermenigvuldiging met een willekeurig centrum:

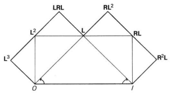
$$\text{(B)} \quad \begin{cases} x' = ax - by + c \\ y' = bx + ay + d \end{cases}$$

waarin de schaalfactor $\sqrt{a_2 + b^2}$ is en de rotatiehoek α wordt bepaald door $\cos \alpha = a / \sqrt{a^2 + b^2}$ of $\sin \alpha = b / \sqrt{a^2 + b^2}$.

Deze formules zijn buitengewoon belangrijk. Men kan ze in veel computerprogramma's van fractals aantreffen.

Toepassing draaivermenigvuldiging We zullen dit alles toepassen op de kromme van Lévy uit hoofdstuk 3 (figuur 3.19), die oneindig voortgezet de limietfiguur is van de boom van Pythagoras (figuur 4.16). In figuur 5.12 zijn de eerste fases van de constructie geschetst. In elke volgende fase worden de lijnstukjes van de gebroken lijn vervangen door winkelhaken. De hoekpunten blijven staan. Eenmaal gevormd, maken ze daarna permanent deel uit van de fractal. De fractal wordt dan ook eigenlijk opgebouwd uit al die hoekpunten.

In figuur 5.12 zijn twee draaivermenigvuldigingen te ontdekken.



Figuur 5.12
Gelijkvormigheidstransformaties in de fractal van Lévy.

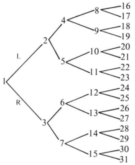
De eerste, **L**, heeft O als centrum, $\pi/4$ als rotatiehoek en $1/\sqrt{2}$ als verkortingsfactor. De tweede, **R** heeft I als centrum, $-\pi/4$ als rotatiehoek en ook $1/\sqrt{2}$ als verkortingsfactor. Zowel **L** als **R** transformeren hoekpunten in andere hoekpunten. De situatie is volkomen vergelijkbaar met wat er in de inleiding van dit hoofdstuk is gezegd over de puntverzameling van Cantor. De fractal van Lévy is dus invariant voor zowel **L** als **R** en wat daaruit door produktvorming kan worden afgeleid.
De punten van de fracta! kunnen systematisch worden bepaald door bij voorbeeld het rechterbasispunt **I** aan een willekeurige rij van **L** en **R** transformaties te onderwerpen. Daarbij kan weer de systematiek van het tweetallig talstelsel worden gebruikt door **L** als wijzergetal 1 en **R** als wijzergetal 0 te interpreteren. Aldus heeft de fractal 'evenveel' punten als er getallen tussen 0 en 1 zijn in het tweetallig talstelsel. Zoals we inmiddels weten, zijn dat er onaftelbaar veel! De overeenkomstige beschrijving in coördinaten luidt:

$$\mathbf{L}\begin{cases} x' = (x - y)/2 \\ y' = (x + y)/2 \end{cases}$$

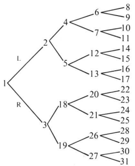
$$\mathbf{R}\begin{cases} x' = (x + y + 1)/2 \\ y' = (-x + y + 1)/2 \end{cases}$$

L heeft dus het centrum (0,0) en **R** het centrum (1,0).
Kiezen we een willekeurig punt P als begin en laten we daarop telkens transformaties **L** en **R** werken, dan krijgen we er bij elke volgende stap tweemaal zoveel punten bij. We kunnen dat proces grafisch beschrijven als een genummerde boom (figuur 5.13). Is P een punt van de fractal dan zijn alle volgende hieruit af te leiden punten dat ook. Dit is een van de manieren om een computerprogramma te maken waarmee fractals punt voor punt geconstrueerd kunnen worden. Deze methode werkt snel en doeltreffend, maar heeft het technische bezwaar dat hij vrij veel geheugenruimte vraagt. Om bij voorbeeld $2^{14} = 16384$ punten te berekenen ten einde ze op het beeldscherm of met de plotter grafisch weer te kunnen geven, zijn er $2 \times 2^{12} = 8192$ geheugenplaatsen nodig. We komen dan wel aan de grens van wat bij de meest gangbare computers aan geheugenruimte gereserveerd is. Er is een betere manier om hetzelfde met veel minder geheugenruimte te kunnen doen. Daartoe moet de boom slechts anders genummerd worden (figuur 5.14). Dat vergt maar $4 \times 12 = 48$ geheu-

Figuur 5.13 Nummering van een tweetallige boom.



Figuur 5.14 Nummering volgens de backtrack-methode.



genplaatsen. Deze methode heet 'backtracking' en is verwerkt in het programma STOFB. Dit programma is buitengewoon flexibel, omdat het de mogelijkheid in zich heeft om voor **L** en **R** verschillende keuzen te maken. Het is een van de meest gebruikte programma's om fractals te maken die opgebouwd zijn volgens een binaire boomstructuur.

Bij deze manier van tellen gaan we telkens naar de kleinste takjes en keren daarna weer op onze schreden terug. Dat laatste gaat zodanig dat optimaal gebruik kan worden gemaakt van eerder uitgerekende deelresultaten. Het programma STOFB is met betrekking tot figuur 5.14 als volgt opgebouwd.

De in de figuur gekozen orde p is 4, maar in het programma zelf is $p = 8$ genomen. Er zijn $p+1$ niveaus genummerd met de teller g van 0 tot aan p. In het programma maken we gebruik van het principe van stapeling. Een zogenaamde stapel (Engels: *stack*) kunnen we opvatten als een stapeltje kaartjes, een soort verticale kaartenbak. Gegevens die we onderweg tegenkomen en die we niet meteen behoeven te gebruiken, plaatsen we op een kaartje en dat leggen we bovenop de stapel. Hebben we in een andere fase van het proces behoefte aan nieuwe gegevens, dan halen we die van de stapel af door de bovenste kaart te pakken. Het is bij deze methode niet goed mogelijk een zich halverwege bevindend kaartje te pakken, maar dat hoeft hier ook niet. In het programma bestaat de stapel uit drie arrays $x(.)$, $y(.)$ en $s(.)$, waarin we de coördinaten x,y van een punt en het bijbehorende niveau g bijhouden. Met de teller m is de hoogte van de stapel aangegeven. Stel nu eens dat we in de loop van het programma de gegevens van het in figuur 5.14 met 18 aangeduide punt ter beschikking hebben. Dat punt was al eerder tegelijk met punt 19 uit punt 3 afgeleid. De gegevens van dat laatste punt liggen bovenop de stapel. We kunnen dan met behulp van de transformaties **L** en **R** de coördinaten van de punten 20 en 21 berekenen. De gegevens van punt 21 leggen we bovenop de stapel en met die van 20 gaan we verder.

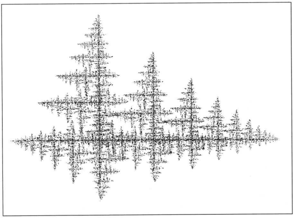
Intussen letten we ook op het niveau van de genoemde punten. Het niveau van punt 20 is nog niet maximaal, zodat we verder in voorwaartse richting kunnen gaan. We leiden nu de coördinaten van de punten 22 en 23 af en beelden ze af. Daarna moeten we weer terug en daartoe bekijken we het bovenste gegeven van de stapel. Dat was punt 21 en daaruit kunnen de nieuwe punten 24 en 25 afgeleid worden. Weer naar de stapel gaand vinden we punt 19 om mee verder te gaan. Zo kunnen we almaar heen en weer springen – voorwaarts en achterwaarts – totdat de stapel helemaal leeg is. Het principe werkt op analoge wijze voor bomen met een drie- of meertallige structuur. In het programma STOFBT wordt op analoge wijze een fractal uit drie transformaties opgebouwd. Bij de overeenkomstige boomstructuur splitst elke tak zich nu in drie nieuwe takken. Aangekomen aan het uiteinde van een tussentak berekenen we de data van de drie nieuwe takken. Met een daarvan gaan we verder en de gegevens van de andere twee leggen we op de stapel. Voor de rest is de structuur van het programma gelijk aan dat van STOFB.

Met het veelzijdige programma STOFB kunnen we een groot aantal fractals maken. Uitgangspunt is steeds het centrum (0,0) van **L** of (1,0) van **R** die in elk geval tot de fractal behoren. Voor een gewone microcomputer kunnen we daarvan uitgaande tot bij voorbeeld 2^{14} = 16384 punten afbeelden. Dat is bijna niets vergeleken met de oneindige hoeveelheid punten waaruit de fractal bestaat, een hoeveelheid die bovendien niet eens aftelbaar is. Toch krijgen we in de praktijk aldus fraaie benaderingen, om niet te zeggen wonderen van schoonheid.
Met het programma STOFB kunnen fractals worden gemaakt waarbij **L** en **R** door de volgende formules zijn vastgelegd:

$$\mathbf{L}\begin{cases} x' = ax - by \\ y' = bx + ay \end{cases}$$

$$\mathbf{R}\begin{cases} x' = cx - dy + 1 - c \\ y' = dx + cy - d \end{cases}$$

L is dus een draaivermenigvuldiging om (0,0) met verkortingsfactor $\sqrt{a^2 + b^2}$ en **R** een draaivermenigvuldiging om (1,0) met verkortingsfactor $\sqrt{c^2 + d^2}$.



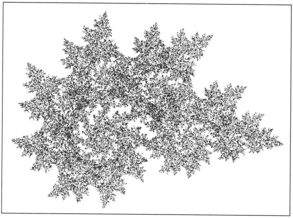
Figuur 5.15 Fractal bepaald door een draaivermenigvuldiging en een schaling.

Voorbeelden met STOFB Bij keuze van $a = d = 0$ en $b = c = 0.7$ ontstaat figuur 5.15. Daarbij is **L** een kwartdraai met verkorting 0.7 en **R** een gewone centrale vermenigvuldiging ten opzichte van (1,0) met een factor 0.7.
Bij keuze van $a = b = 0.6$, $c = .53$, $d = 0$ ontstaat figuur 5.16. **L** en **R** zijn van dezelfde aard als in het vorige voorbeeld. Hier heeft **L** de rotatiehoek $\pi/4$ (45°). Het resultaat doet denken aan een bebladerde tak. Er zijn nog wat losse punten zichtbaar, maar als

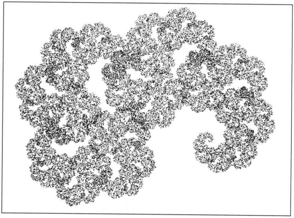
we overgaan tot een hogere orde benadering, gaan daar natuurlijk ook weer bebladerde takjes aangroeien volgens de eigenschap van zelfgelijkvormigheid.

Ten slotte ontstaat bij keuze $a = 0$, $b = 1/\sqrt{2}$, $c = 1/2$ en $d = -1/2$ figuur 5.17. Nu zijn **L** en **R** beide draaiingen met dezelfde verkorting van $1/\sqrt{2}$. De rotatiehoeken zijn respectievelijk $\pi/2$ (90°) en $-\pi/4$ (−45°).

Figuur 5.16 Fractal bepaald door een draaivermenigvuldiging en een schaling.



Figuur 5.17 Fractal bepaald door twee draaivermenigvuldigingen.



Spiegeling

De (lijn)spiegeling, aan te geven met **S**, is gekenmerkt door een as van spiegeling, een symmetrie-as (figuur 5.18). Een herhaalde spiegeling herstelt weer de oorspronkelijke toestand. In de taal van

de algebra van transformaties kunnen we dit uitdrukken door $S^2 = I$.

Bij fractals komt de lijnspiegeling meestal voor in combinatie met een schaalverandering. Deze combinatie zullen we vaak een *krimpspiegeling* noemen. In figuur 5.19 is zo'n krimpspiegeling geschetst. Het kenmerk van de krimpspiegeling is een centrum, het enige punt dat op zijn plaats blijft, en twee onderling loodrechte assen, de enige lijnen die bij de transformatie niet van plaats veranderen. In figuur 5.19 zijn dat de X-as en de Y-as van het cartesisch coördinatenstelsel.

In coördinatenmeetkunde ziet de krimpspiegeling er heel eenvoudig uit als:

$$\begin{cases} x' = cx \\ y' = -cy \end{cases}$$

Ook hieruit blijkt dat de krimpspiegeling een combinatie is van een spiegeling om de X-as ($y \rightarrow -y$) en een vermenigvuldiging ten opzichte van de oorsprong O ($x \rightarrow cx$, $y \rightarrow cy$). De volgorde van de twee componenten is niet van belang. Zo geeft in figuur 5.19 eerst spiegelen en dan vermenigvuldigen de route $P \rightarrow P_1 \rightarrow P'$, terwijl vermenigvuldigen gevolgd door spiegelen tot $P \rightarrow P_2 \rightarrow P'$ leidt.

Een interessante eigenschap van de krimpspiegeling is dat een herhaling niets anders is dan een gewone centrale vermenigvuldiging. Passen we bovenstaande formules tweemaal toe dan komt er namelijk $x' = c^2x$, $y' = c^2y$, dat wil zeggen de beschrijving van een centrale vermenigvuldiging ten opzichte van de oorsprong O met een factor c^2.

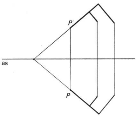
De meest algemene beschrijving van de krimpspiegeling is:

$$\text{(C)} \quad \begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = bx - ay + d \end{cases}$$

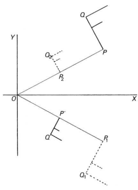
met schaalfactor $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Deze formules zijn de tegenhangers van die van de draaivermenigvuldiging (B). De verschillen zijn gering, alleen in het teken van y. Ook deze formules zijn van belang voor de computerprogramma's.

Figuur 5.18 Lijnspiegeling.



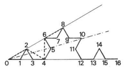
Figuur 5.19 Krimpspiegeling.



Toepassing krimpspiegeling Als toepassing van de krimpspiegeling beschouwen we de kromme van Von Koch uit hoofdstuk 3 (figuur 3.1). De eerste paar fases van de constructie van die kromme zijn nog eens geschetst in figuur 5.20. Ook hier wordt in elke volgende fase ieder lijnstukje vervangen door een kronkellijntje, terwijl de hoekpunten op hun plaats blijven. Die hoekpunten maken dan ook deel uit van de limietfiguur die wordt verkregen na oneindig veel stapjes.

In figuur 5.20 zijn er 17 hoekpunten, genummerd van 0 tot en met 16. De verbindingslijn van de punten 0, 2, 4, 6, 8 heeft precies dezelfde vorm als de lijn 0, 4, 8, 12, 16 uit de eerste fase, maar dan gespiegeld. We hebben blijkbaar te maken met een krimpspie-

Figuur 5.20 Krimpspiegelingen in de fractal van Von Koch.



geling. Uit figuur 5.20 is af te leiden dat de as met de horizontale lijn 0-16 een hoek van $\pi/12$ (15°) maakt. De factor van de krimpspiegeling is $1/\sqrt{3}$.

Bij herhaling van de krimpspiegeling gaat de gebroken lijn 0, 2, 4, 6, 8 over in 0, 1, 2, 3, 4. De stap van 0, 4, 8, 12, 16 naar 0, 1, 2, 3, 4 is een gewone centrale vermenigvuldiging met factor 1/3.

In coördinaten wordt de krimpspiegeling beschreven door het stelsel formules (C) met $c = d = 0$. Als punt 16 in figuur 5.20 de coördinaten (1,0) heeft, dan zijn de coëfficiënten a en b gelijk aan de coördinaten van 8, te weten $a = 1/2$ en $b = 1/(2\sqrt{3})$.

De kromme van Von Koch is dus invariant ten opzichte van de krimpspiegeling ten opzichte van (0,0). Evenzo is er een tweede krimpspiegeling ten opzichte van (1,0). Beide spiegelingen kunnen we dan beschrijven als:

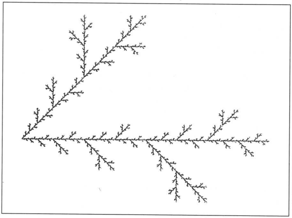
$$\mathbf{L}\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + by \\ y' = bx - \frac{1}{2}y \end{cases}$$

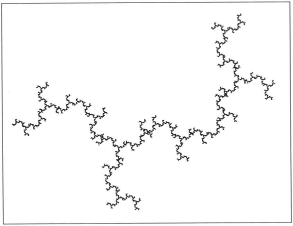
$$\mathbf{R}\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - by + \frac{1}{2} \\ y' = -bx - \frac{1}{2}y + b \end{cases}$$

waarbij $b = 1/(2\sqrt{3})$.

Nog enkele voorbeelden met STOFB Nu zijn we in staat om met ongeveer hetzelfde computerprogramma een grote verscheidenheid aan fractals samen te stellen, of beter gezegd te benaderen door puntenwolken. Het bouwschema is steeds hetzelfde. We gaan uit van twee transformaties **L** en **R** waarbij we, althans voorlopig, kunnen kiezen uit een draaivermenigvuldiging en een krimpspiegeling.

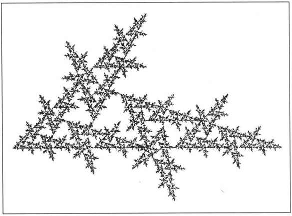
Figuur 5.21 Fractal bepaald door twee krimpspiegelingen.





Figuur 5.22 Fractal bepaald door een draaivermenigvuldiging en een krimpspiegeling.

De fractal wordt dan bepaald door het kleinste aantal punten die in elkaar overgaan door **L** en **R** en alle daaruit af te leiden combinaties. Nemen we als beginpunt het centrum van **L**, een punt dat zeker deel uitmaakt van de fractal, en vormen we volgens het principe van de binaire boom hieruit alle volgende punten tot aan een zekere orde, dan ontstaat in de regel een fraaie figuur. We geven nog een aantal voorbeelden.
In figuur 5.12 zijn **L** en **R** krimpspiegelingen met $a = 1/2$, $b = 1/2$, $c = 1/2$ en $d = 0$.
In figuur 5.22 is **L** een draaivermenigvuldiging met $a = -0.3$ en $b = 0.5196$, terwijl **R** een krimpspiegeling is met $c = a$ en $d = -b$.
De fractal heeft een sterk vertakte structuur, een zogenaamde dendriet.



Figuur 5.23 Fractal bepaald door twee krimpspiegelingen.

In figuur 5.23 laten we nog een ander type fractal zien. Deze is ontstaan uit de twee spiegelingen:

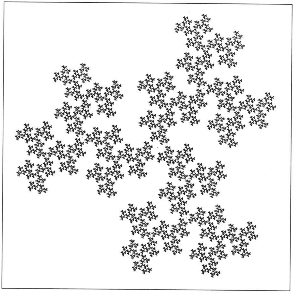
$$\mathbf{L}\begin{cases} x' = (x + y)/2 \\ y' = (x - y)/2 \end{cases}$$

en

$$\mathbf{R}\begin{cases} x' = (3x - y + 2)/5 \\ y' = (-x - 3y + 1)/5 \end{cases}$$

Dezelfde constructie kunnen we ook met drie (of meer) transformaties uitvoeren. In figuur 5.24 hebben we aldus een fractal verkregen die is ontstaan door drie draaivermenigvuldigingen om de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek. Het programma heet STOFBT.

Figuur 5.24 Fractal bepaald door drie draaivermenigvuldigingen.



Toeval in de fractal

De tot dusver beschouwde fractals waren eigenlijk te mooi, teveel streng wiskundig, met een volmaakte zelfgelijkvormigheid, zoals we kunnen waarnemen bij de kromme van Von Koch uit figuur 3.1. In hoofdstuk 3 hebben we die kromme vergeleken met een kustlijn, zoals die van de westkust van Engeland. In werkelijkheid worden kustvormen echter bepaald door het grillige spel van de natuurkrachten, zodat er bij de vervorming toevalligheden werkzaam zijn. Meer realistische fractals krijgen we door het kenmerk van de zelfgelijkvormigheid niet exact, maar in statistische zin te interpreteren. Daatoe eisen we dat elk onderdeel van de fractal dezelfde statistische eigenschappen heeft met betrekking tot de vorm. De wiskundige theorie van dergelijke *stochastische fractals* is niet eenvoudig. We kunnen er hier dan ook niet veel over zeggen.
Het is echter wel eenvoudig om die fractals met de computer te genereren. De computer beschikt in het algemeen over een ingebouwd toevalsmechanisme, een soort elektronische dobbelsteen. Daarmee kunnen we bij de constructie van een fractal naar believen gebruikmaken van toevalligheden.
Methoden die op toeval berusten, pleegt men naar believen wel als Monte-Carlo-methoden te betitelen. Een wat deftiger benaming is stochastische methoden. De term stochastiek, waarschijnlijkheidsrekening en statistiek, is afgeleid van een Grieks werkwoord dat 'gissen' betekent, giskunde dus.

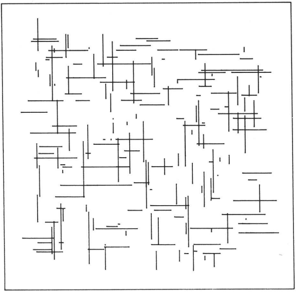
In dit hoofdstuk worden onder het kopje *Monte Carlo* een aantal aspecten van het toeval besproken. We zullen dan zien hoe fractals door een soort gestuurd toeval gemodificeerd kunnen worden.
Meer over toevallige fractals wordt gezegd bij de *brownse beweging*, zo genoemd naar de bioloog Robert Brown (1773-1858) die waarnam hoe microscopisch kleine deeltjes zich volgens grillige kronkelbanen bewegen. Nu spreken we ook van *brownse fractals*. Dat zijn niet alleen kronkellijnen, maar ook imaginaire berglandschappen. Zo'n browns landschap kan op fraaie wijze met omvangrijke en kostbare computerapparatuur worden samengesteld. De resultaten worden ondere andere gebruikt in science fiction films.
In het gedeelte over het getal van Feigenbaum doen we verslag van een serie computerexperimenten waarbij recentelijk opzienbarende resultaten werden behaald. Deze gaven aanleiding tot nieuwe inzichten in het ontstaan van chaos uit orde. Het gaat daarbij om een eenvoudig model van geremde groei $x \to ax(1-x)$. De essentiële

experimenten kunnen zelfs op een, liefst programmeerbare zakrekenmachine worden nagevolgd. Ook hier weer zelfgelijkvormigheid en stochastische aspecten.
Het model van geremde groei stamt uit 1945 en wordt gewoonlijk genoemd naar de Belgische wiskundige Pierre François Verhulst (1804-1849). Het kan worden uitgebouwd tot een iteratieve afbeelding in het platte vlak waaraan de namen van Gaston Julia en B.B. Mandelbrot verbonden zijn. Dat model komt in hoofdstuk 7 uitvoeriger aan de orde.

Monte Carlo

Bij de constructie van een fractal kan het toeval op verschillende manieren ingeschakeld worden. Voordat we in detail kunnen treden moeten we eerst iets zeggen over het begrip 'toevallig getal' en over een reeks van toevallige getallen. In het Engels spreekt men van een 'random number'. Die uitdrukking is terug te vinden in de programmeertaal van een computer waar de opdracht 'random' (afgekort rnd) een toevallig getal produceert.
Wanneer we een dobbelsteen werpen, kunnen er zes getallen (het aantal ogen) 1, 2, 3, 4, 5 of 6 ontstaan, alle met gelijke waarschijnlijkheid. Werpen we vele malen achtereen, dan krijgen we een reeks van toevallige uitkomsten waarin elke regelmaat ontbreekt. In de praktijk is het ondoenlijk om op deze manier een lange rij toevallige getallen te produceren. Vroeger werd dit probleem handig opgelost door gebruik te maken van met zorg samengestelde tabellen. Dergelijke tabellen kunnen worden onderworpen aan vernuftige statistische toetsingen. Het resultaat zal steeds zijn dat geen enkele getallencombinatie een overheersende plaats inneemt. Binnen statistische grenzen komen alle combinaties even vaak voor. Tegenwoordig produceert de computer volgens een bepaalde rekenwijze tijdens de uitvoering van een programma een willekeurig lange rij toevallige getallen. De gevolgde methode kunnen we aan de hand van een voorbeeld uitleggen.
We kiezen een willekeurig getal van vier cijfers, de 'seed' in computerjargon. We kwadrateren dit getal en verwijderen de voorste en achterste cijfers van het kwadraat tot we in het midden een getal van vier cijfers overhouden. Met dat getal gaan we op dezelfde manier verder. Dus opnieuw kwadrateren, kop en staart verwijderen, enzovoort, enzovoort. We krijgen dan een reeks van getallen tussen 0 en 9999. Deze is goed bruikbaar als een rij toevallige getallen. Met goed bruikbaar wordt bedoeld dat de statistische toetsen op toeval succes hebben. Anderzijds is de rij volgens een vaste regelmaat gevormd. Alles is vastgelegd door de keuze van het begingetal. De rij is dus deterministisch, maar geeft de indruk chaotisch te zijn. Dit is voor ons een eerste kennismaking met het begrip 'deterministische chaos', een concept dat tegenwoordig in de theoretische natuurkunde sterk in de belangstelling staat.
In werkelijkheid vormt de computer bij de 'rnd'-opdracht intern

een groepje van nullen en enen dat zich aan de gebruiker kan voordoen als een willekeurig getal tussen 0 en 1. Geschreven in het tientallig stelsel bevat dit getal acht cijfers achter de decimale punt. Uitgaande van een zeker begingetal als 'seed' produceert de computer dan volgens de hierboven geschetste methode een willekeurig lange reeks van pseudo-toevalsgetallen. Die rij is deterministisch. Een zelfde 'seed' levert namelijk een zelfde rij. Maar zoals de plantkunde leert dat niet alle zaadjes kiemkrachtig zijn, kan deze methode in de praktijk wel eens mislukken. Gelukkig gaat het in verreweg de meeste gevallen goed.
Het gebruik van de 'rnd'-opdracht is aardig te illustreren aan de hand van een computerexperiment waarvan het resultaat doet denken aan de kunst van de schilder Mondriaan. Op toevallige wijze worden binnen een vierkant horizontale of verticale lijnstukjes getekend. Zowel de positie als de lengte van een lijnstukje hangt evenals de keus uit verticaal of horizontaal, van het toeval af. Een mogelijk resultaat gemaakt met het programma MONDRIAN, is te vinden in figuur 6.1.



Figuur 6.1 Toevallige kunst à la Mondriaan.

Illusie van complete fractal In het vorige hoofdstuk is uitvoerig ingegaan op de constructie van een fractal met een boomstructuur. Is die structuur tweetallig, dan berust de constructie op het in figuur 5.13 weergegeven schema. Uitgaande van een beginpunt *P* worden met twee transformaties **L** en **R** volgende punten afgeleid, eerst 2, dan 4, 8, 16, enzovoort. **L** en **R** waren gelijkvormigheids-

transformaties en er werden fractals verkregen als afgebeeld in de figuren 5.15, 5.16, 5.17, 5.21, 5.22 en 5.23. Algemener mogen **L** en **R** ook andere transformaties zijn. Daarvan zullen we in het volgende hoofdstuk een aantal toepassingen tegenkomen. Hier concentreren we ons echter op het bovenbeschreven formalisme waarbij elk reeds gevonden punt tot twee nieuwe punten aanleiding geeft. Het is als het oude verhaal van de graankorrels op het schaakbord. Het aantal punten wordt in elke ronde verdubbeld, neemt exponentieel toe en overspoelt het geheugen van de computer. In het vorige hoofdstuk hebben we een soort boekhoudkundige truc, de backtrack-methode, laten zien om met minder geheugen toch meer te kunnen doen.
Er bestaat echter ook een andere methode. Die berust op toeval en is in de praktijk heel effectief. Het idee is dat een fractal in principe uit (onaftelbaar) oneindig veel punten bestaat en dat we daarvan slechts een klein deel kunnen afbeelden. Tienduizend punten op het beeldscherm van een microcomputer is al heel wat, maar in vergelijking met de oneindigheid is het natuurlijk niets! Het is dan ook de kunst om die, zeg tienduizend punten, zó te spreiden dat de illusie van een complete fractal wordt gewekt. Nu gaan we het anders doen. We vormen een toevallige reeks van punten: $P_0\ P_1\ P_2\ P_3 \ldots$ waarbij elk punt uit het voorafgaande is afgeleid door er òf de transformatie **L** òf de transformatie **R** op toe te passen. Dus $P_1 = \mathbf{L}P_0$ of $P_1 = \mathbf{R}P_0$, enzovoort.

De keuze **L** òf **R** hangt van het toeval af. Gebruikmakend van de 'rnd'-opdracht kunnen we het bovenstaande samenvatten als:

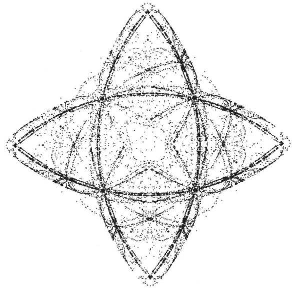
$$\text{if rnd} < \frac{1}{2} \text{ then } P_{n+1} = \mathbf{L}P_n \text{ else } P_{n+1} = \mathbf{R}P_n$$

Soms is het nuttig bij het maken van een keuze met verschillende kansen te werken. Dus algemener iets als 'if rnd<q then ...' waarbij q een zogenaamde kansdrempel is. Is bij voorbeeld $q = 1/3$, dan wordt gemiddeld **R** tweemaal zo vaak gekozen als **L**.

De praktijk Hoe dat in de praktijk doorwerkt, is het beste toe te lichten aan de hand van een eenvoudig voorbeeld, de ons inmiddels bekende puntverzameling van Cantor. We sluiten aan bij wat daarover aan het begin van hoofdstuk 5 is verteld.
De punten van de cantor-verzameling identificeren we met de getallen tussen 0 en 1 die in het drietallig stelsel zonder het cijfer 1 kunnen worden geschreven. Bij voorbeeld $x = 0.020222022202$. De transformaties **L** en **R** zijn:

$$\mathbf{L} : x' = \frac{x}{3}$$

$$\mathbf{R} : x' = \frac{2}{3} + \frac{x}{3}$$



Figuur 6.2 Fractal bepaald door twee transformaties gevormd volgens de Monte-Carlo-methode.

Met de Monte-Carlo-methode dobbelen we als het ware een toevallige rij:

... **L R L R R L R R R L R**

te lezen van rechts naar links! Als startpunt kiezen we $x = 0$, de eenvoudigste keuze, maar elke andere keuze werkt even goed. De constructie is dan af te lezen uit het volgende staatje:

	patroon	x
P_0		0
$P_1 = \mathbf{R}P_0$	**R**	.2
$P_2 = \mathbf{L}P_1$	**LR**	.02
$P_3 = \mathbf{R}P_2$	**RLR**	.202
$P_4 = \mathbf{R}P_3$	**RRLR**	.2202
$P_5 = \mathbf{R}P_4$	**RRRLR**	.22202
$P_6 = \mathbf{L}P_5$	**LRRRLR**	.022202
$P_7 = \mathbf{R}P_6$	**RLRRRLR**	.2022202
$P_8 = \mathbf{R}P_7$	**RRLRRRLR**	.22022202
$P_9 = \mathbf{L}P_8$	**LRRLRRRLR**	.022022202
...	...	...

Bij elke volgende stap schuiven de wijzergetallen een plaatsje naar rechts op, terwijl er links òf een 0 òf een 2 bijkomt.
Nu zien we ook waarom de keuze van het beginpunt er weinig toe

doet. Na bij voorbeeld tien stappen zijn de corresponderende wijzergetallen van de drietallige breukontwikkeling even zo vele posities opgeschoven. Hun bijdrage is dan nog maar van de orde 3^{-10} ofwel 0.000017 in decimale notatie.

Bij de constructie van een fractal op het beeldscherm is de numerieke precisie beperkt. Voor de hier geconstrueerde puntverzameling van Cantor waarbij het lijnstuk [0,1] zich over de volle breedte van het beeldscherm uitstrekt, is een nauwkeurigheid van acht posities (decimaal) achter de decimale punt ruim voldoende. Dat betekent dat er maar $2^8 = 256$ beeldpunten kunnen worden afgebeeld. Om die beeldpunten met dobbelen bij elkaar te krijgen, moet er wel wat meer dan 256 keer worden geloot. Een statistische overweging wijst uit dat bij 1000 toevalskeuzen er gemiddeld nog vijf aan de aandacht ontsnappen. We moeten dan tot minstens 1600 toevalskeuzen gaan om ze ongeveer allemaal te krijgen.

Wat voor de puntverzameling van Cantor is gezegd, geldt in principe voor elke fractal die met de Monte-Carlo-methode wordt opgebouwd. Hoe ver we met het lotingsproces moeten gaan is meestal een zaak van proberen binnen de grenzen van computersnelheid en oplossend vermogen van het beeldscherm.

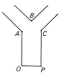
De fractal van figuur 6.2 is verkregen met een versie van het programma STOF. De transformaties zijn:

$$\mathbf{L}\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$$

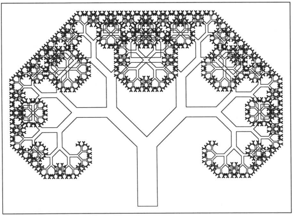
$$\mathbf{R}\begin{cases} x' = 1 + a(x-1)/((x-1)^2 + y^2 + 1) \\ y' = ay/((x-1)^2 + y^2 + 1) \end{cases}$$

met $a = 2.8$.

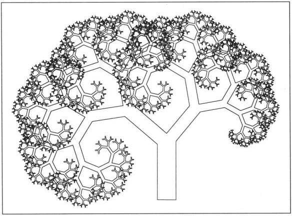
L is een kwartdraai om (0,0). **R** is een centrale vermenigvuldiging ten opzichte van (1,0) met een factor die niet constant is, maar afhangt van de afstand van (x,y) tot het centrum (1,0). De figuur bevat een aantal symmetrieën. Die worden in het programma goed uitgebuit. De berekening van een enkel punt levert namelijk tegelijkertijd de posities van zeven andere punten.



Figuur 6.3 Stam van een pythagorasboom.



Figuur 6.4 Mathematische pythagorasboom.



Figuur 6.5 Op toevallige wijze gedeformeerde pythagorasboom.

Model voor natuurlijke objecten Door het toeval in de zin van kleine storingen bij de constructie te betrekken, kunnen fractals model staan voor natuurlijke objecten als bomen, planten, sponzen en koralen. We illustreren dit met de constructie van een soort door de wind verwaaide boom van Pythagoras (figuur 6.5). Daartoe bekijken we eerst figuur 6.4, een variant op de pythagorasboom van figuur 4.16. Het basismotief is een stam met twee aanhechtingen *AB* en *BC* voor de zijtakken (figuur 6.3). In het desbetreffende programma PYTHBS zijn de posities van *A*, *B* en *C* gekozen als (0,3), (0.5,3.5) en (1,3).

Zoals we weten komt de constructie erop neer dat het stammotief op steeds kleinere schaal gelijkvormig wordt gekopieerd. Alvorens het motief in verkleinde vorm ergens aan te brengen, gaan we het

nu op toevallige wijze een beetje veranderen. Dat gaat in het programma eenvoudig door bij voorbeeld een parameter a als volgt te wijzigen:

$$a \rightarrow a + w(\text{rnd} - \frac{1}{2})$$

Het getal tussen haakjes is een toevallig getal tussen –0.5 en +0.5. Met de factor w kan de intensiteit van de toevallige storingen worden beïnvloed. Wanneer $w = 0$, is het toeval uitgeschakeld en ontstaat figuur 6.4. Voor $w = 0.1$ krijgen we daarentegen de verwaaide boom van figuur 6.5.

Brownse beweging

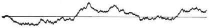
In 1828 ontdekte de Schotse bioloog Robert Brown (1773-1858) een merkwaardig verschijnsel. Kijkend door een microscoop naar in een vloeistof zwevende kleine deeltjes, trof het hem dat die deeltjes kleine, maar grillige en onvoorspelbare bewegingen uitvoerden. Hij schreef dit verschijnsel toe aan fysische oorzaken. Pas veel later, in 1905, werd deze brownse beweging theoretisch begrepen en wel door Einstein. De vloeistofmoleculen voeren onregelmatige thermische bewegingen uit, bewegingen die des te sterker zijn naarmate de temperatuur hoger is. Daarbij botsen die moleculen voortdurend tegen veel grotere microscopisch zichtbare deeltjes die als gevolg daarvan grillige bewegingen uitvoeren.
Het begrip fractal, of liever fractalkromme, helpt ons om van de baan van een deeltje dat een brownse beweging uitvoert, een voorstelling te maken. Die baan is iets als een driedimensionale kustlijn met kronkels op elke schaal. Het principe van zelfgelijkvormigheid blijft geldig mits men er een waarschijnlijkheidsinterpretatie aan verbindt. Het komt erop neer dat de statistische eigenschappen van elk onderdeel, hoe klein ook, onafhankelijk zijn van de schaal. Het experiment van Robert Brown kunnen we dan in fractalvorm parafraseren door te stellen dat Brown door zijn microscoop naar een ruimtelijke fractallijn keek. De kleinste kronkels op moleculair niveau kon hij niet zien, maar de grotere die binnen het bereik van de microscopische zichtbaarheid vielen wel. Met een tien- of honderdmaal sterkere microscoop zou hij praktisch hetzelfde hebben gezien!
Met Mandelbrot kunnen we nu het begrip fractal uitbreiden tot een meetkundige structuur met een statistische zelfgelijkvormigheid. De baan van het microscopische deeltje is dus een brownse fractallijn. Analoog is er ook een browns oppervlak of een browns landschap. Brownse fractals zijn in zekere zin veel natuurlijker objecten. Een maanlandschap zou heel goed als een fractaloppervlak gezien kunnen worden. Enkele grote kraters vormen de grootste schaal. Op (bijna) elke andere schaal zijn ook kraters te zien. Grootte en positie van de kraters zijn afhankelijk van het toeval, kortom een maanfractal. Wat de natuur in honderden miljoenen jaren tot

stand heeft gebracht, kan een grote computer in enkele minuten nabootsen.

De wiskundige principes, een reeks meetkundige transformaties gebaseerd op toeval, zijn vrij eenvoudig, maar de technische eisen die aan de computer gesteld worden, zijn niet gering. Van het meetkundig bepaalde object, een maanlandschap of een planeet in een science fiction film, moet met behulp van de computer een realistisch beeld, een projectie, worden vervaardigd, liefst in kleuren, op een bepaalde manier belicht en alleen datgene moet worden afgebeeld wat voor een imaginaire waarnemer zichtbaar is. Die techniek, computer graphics, is van toenemend belang in de wereld van film, televisie en industrie, maar vereist uitgebreide en kostbare computerapparatuur. De figuren 6.6 en 6.7, ontleend aan Mandelbrot, laten iets van de mogelijkheden zien.

Brownse lijn Met een microcomputer die zo'n honderdmaal goedkoper is, kunnen we natuurlijk veel minder doen, maar toch is het een uitstekend hulpmiddel om iets van de wiskundige principes te demonstreren. Ons doel is heel bescheiden, een fractalconstructie van een brownse lijn in een plat vlak. We kunnen daarbij denken aan een kustlijn of bij voorbeeld het profiel van het landschap langs de lijn die Keulen met Parijs verbindt. De eenvoudigste manier om zo'n brownse lijn te verkrijgen is als volgt.

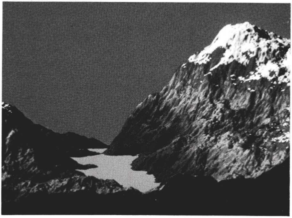
We nemen een lijnstuk en verdelen dit in bij voorbeeld 1001 punten: $x_0 = 0$, $x_1 = 0.001$, $x_2 = 0.002$, ..., $x_{1000} = 1$. Met de computer produceren we een reeks van 1000 toevalsgetallen $r_1, r_2, r_3, ..., r_{1000}$ met waarden tussen 0 en 1. Daarna maken we een grafiek waarbij we in het k-de punt $x_k = k/1000$ de waarde $(r_1-1/2) + (r_2-1/2) + (r_3-1/2) + ... + (r_k-1/2)$ uitzetten met een geschikte schaalfactor. Zo krijgen we een rij punten $P_0, P_1, P_2, ...$ waarbij P_0 met het linkereindpunt van het uitgangslijnstuk samenvalt. Omdat voor elke index $(r-1/2)$ tussen $-1/2$ en $+1/2$ in ligt, komt elk volgende punt volgens toeval een beetje hoger of een beetje lager dan zijn voorganger. Het resultaat, verkregen met het programma BROWNL, is figuur 6.8.



Figuur 6.8 Brownse lijn van winst en verlies.

Aan die lijn kan een aardige interpretatie worden gegeven als een grafiek van winst en verlies bij twee spelers die met elkaar een gokspelletje spelen. Wint Jan, dan betaalt Piet hem een vast bedrag. Verliest Jan, dan betaalt hij hetzelfde aan Piet. Het spel wordt vele, zeg duizend, malen herhaald. Na afloop van elk spel noteert Jan zijn totale winst of Piets totale verlies, wat hetzelfde is. Het loont de moeite het spel op de computer na te bootsen. Het resultaat is telkens weer een andere brownse lijn. De ene keer wint Piet almaar, de andere keer staat hij voortdurend op verlies, maar het geluk kan hen ook beurtelings toelachen.

Figuur 6.6 Browns landschap.



Figuur 6.7 Browns landschap.

Getal van Feigenbaum

Er bestaat geen Nobelprijs voor de wiskunde. Dat is jammer, omdat daardoor opzienbarende wiskundige ontdekkingen weinig in de openbaarheid treden. Dit gedeelte gaat over een recente ontdekking waarbij de zelfgelijkvormigheid tot in het oneindig kleine weer in het geding is. Het berust op een numeriek experiment dat elke

scholier met een eenvoudige programmeerbare zakrekenmachine had kunnen uitvoeren. Het gaat om een wiskundig model van geremde groei dat onder andere een beschrijving geeft van aantallen insekten in opvolgende generaties, vliegen bij voorbeeld. We passen daarbij een beetje schaling toe, zodat het aantal vliegen x altijd een getal tussen 0 en 1 is.
Het model voor ongeremde groei is eenvoudig $x \rightarrow ax$ wat wil zeggen dat er in elke volgende generatie a-maal zoveel vliegen zijn. Is bij voorbeeld $a = 2$ en beginnen we met $x = 0.001$, dan krijgen we de rij:

$x_0 = 0.001$, $x_1 = 0.002$, $x_2 = 0.004$, $x_3 = 0.008$,
$x_4 = 0.016$, $x_5 = 0.032$, $x_6 = 0.064$, $x_7 = 0.128$,
$x_8 = 0.256$, $x_9 = 0.512$.

De hierbij gebruikte index is tevens het rangnummer van de generatie. Omdat we haden gesteld dat $0 \leq x \leq 1$ moeten we met de negende generatie ophouden. Immers, verder doorgaan zou betekenen $x_{10} = 1.024$, $x_{11} = 2.048$. Het model van ongeremde groei is dan niet meer realistisch!
De bekende econoom Malthus die zich uitvoerig met groeimodellen heeft beziggehouden, leeft voort in de benaming van de factor a als de malthusiaanse factor. Men zou dit getal dan ook kunnen interpreteren als een maat voor de vruchtbaarheid van de insektenpopulatie. Het model van de geremde groei is in 1845 door P.F. Verhulst hieruit afgeleid door aan te nemen dat de malthusiaanse factor afneemt naarmate de aantallen x toenemen. Het maximum dat het milieu toelaat is $x = 1$. Bij aanwezigheid van x insekten is dus $1 - x$ een maat voor de vrije ruimte die in de natuur nog uitbreiding van de populatie toelaat. Het ligt dan ook voor de hand a te vervangen door $a(1 - x)$. Het model wordt dan $x \rightarrow ax(1 - x)$, of in een notatie met indices:

(A) $x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$

Nemen we weer hetzelfde voorbeeld met $a = 2$ en $x_0 = 0.001$, dan krijgen we:

$x_0 = 0.001$, $x_1 = 0.002$, $x_2 = 0.004$, $x_3 = 0.008$,
$x_4 = 0.016$, $x_5 = 0.031$, $x_6 = 0.060$, $x_7 = 0.113$,
$x_8 = 0.201$, $x_9 = 0.321$, $x_{10} = 0.436$, $x_{11} = 0.492$,
$x_{12} = 0.500$, $x_{13} = 0.500$, ...

Blijkbaar is er in het begin nog weinig verschil, maar vanaf de zevende generatie wordt de remming steeds duidelijker merkbaar. Ten slotte blijft het aantal constant. Er is dan een biologisch evenwicht bereikt tussen populatie en milieu.
Uiteraard zijn realistische modellen in de biologie meestal ingewikkelder. Toch vertoont dit model (A) praktisch alle kenmerken van de meer gecompliceerde modellen. Dit model wordt vaak het model

van Verhulst genoemd. Het is uitvoerig bestudeerd en beschreven in de wetenschappelijke literatuur. Hoewel veel zich afspeelt bij de toppen van het wiskundig hooggebergte waarbij fraaie vergezichten alleen voorbehouden zijn aan specialisten, is er toch voor het grote publiek heel wat te beleven, ook al zal men dieper inzicht in het hoe en waarom moeten ontberen. Laten we dus voorlopig maar afdalen in de laagvlakte en ons daar bezighouden met een paar eenvoudige waarnemingen omtrent het model van Verhulst.

Om te beginnen weken we het model even los van zijn biologische achtergrond. We gaan het bekijken met de ogen van een wiskundige. Is x een getal tussen 0 en 1, dan is $x(1 - x)$ maximaal $1/4$ en $ax(1 - x)$ maximaal $a/4$. Beperken we de factor a dus tot het interval [0,4], dan zijn we er zeker van dat de transformatie $x \rightarrow ax(1 - x)$ ons niet buiten het interval [0,1] voert. We nemen dus aan dat $0 \leq a \leq 4$ en voeren het volgende experiment uit. Na keuze van een vaste waarde voor a en een willekeurige beginwaarde x_0, produceren we met de computer een rij $x_1, x_2, x_3, \ldots$ en vragen ons af wat er op den duur gebeurt. We doen dat een beetje systematisch. Wanneer $0 < a \leq 1$, gaat x_n naar nul toe, dus $x_n \rightarrow 0$. In het biologisch model betekent dit dat de insekten uitsterven bij onvoldoende vruchtbaarheid.

Wanneer $1 < a \leq 2$ blijkt x_n tot een evenwichtswaarde te naderen. Die limietwaarde is gemakkelijk uit te rekenen, wanneer we in (A) zowel x_n als x_{n+1} door de limietwaarde L vervangen. Uit de gelijkheid $L = aL(1-L)$ volgt dan meteen het resultaat $L = 1 - 1/a$. Bovendien blijkt de rij $x_1, x_2, x_3, \ldots$ òf steeds grotere getallen òf steeds kleinere getallen op te leveren. Wiskundigen zeggen dat in dit geval de rij òf stijgend òf dalend is.

Wanneer $2 < a \leq 3$ zien we experimenteel dat de rij naar een limietwaarde toegaat die gelijk is aan $1 - 1/a$, maar dat hier de limiet van weerskanten wordt benaderd, oscillerend heet dit. In het biologisch model wil dit zeggen dat er voor $1 < a \leq 3$ een stabiel evenwicht bestaat. Er is evenwicht in de natuur.

Een stapje verder We gaan nu voorzichtig een stapje verder en nemen $a = 3.2$. Dan zal blijken dat na een aanloop de waarden heen en weer pendelen tussen 0.5130 en 0.7995. We hadden zojuist gevonden dat het evenwicht $1 - 1/a = 0.6875$ zou zijn. Dat is inderdaad correct, maar het evenwicht is nu instabiel, dat wil zeggen gevoelig voor kleine storingen. Het is interessant om de getallenrij te starten met $x_0 = 0.6876$, heel dicht bij het evenwicht. We zullen dan zien dat we langzaam wegdrijven van de evenwichtswaarde en toch weer terechtkomen in de 2-cyclus van 0.5130 en 0.7995.

Laten we a wat verder toenemen, dan blijft dit verschijnsel bewaard. Maar wanneer a de waarde 3.4495 (precies $1+\sqrt{6}$) passeert, wordt ook de 2-cyclus instabiel en manifesteert zich een 4-cyclus. Is bij voorbeeld $a = 3.5$ en beginnen we met $x_0 = 0.2$, dan zitten we na 25 stappen al in de 4-cyclus met een nauwkeurigheid van vier decimalen: 0.5009, 0.8750, 0.3828, 0.8269.

Bij a = 3.5441 gebeurt er weer wat. De 4-cyclus houdt op stabiel te zijn en gaat over in een 8-cyclus. De bijzondere waarden van a waarvoor deze overgangen van de ene cyclus naar de andere optreden, heten bifurcatiepunten (*furca* is vork in het Latijn). De overgangen heten *bifurcaties*. Het beschreven verschijnsel noemt men periodeverdubbeling.

Grote ontdekkingen We staan nu aan de vooravond van grote ontdekkingen. We vatten daartoe het boven beschrevene in het volgende schema samen:

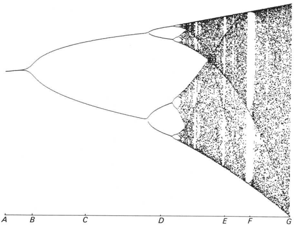
m	a	toename van a	verhouding van de toename
1	3	–	–
2	3.449499	0.449499	–
3	3.544090	0.094591	4.75
4	3.564407	0.020313	4.66
5	3.568759	0.004352	4.67
6	3.569692	0.000933	4.67
7	3.569891	0.000199	4.7
8	3.569934	0.000043	4.6

Met het rangnummer m geven we de bifurcatiewaarde aan waarbij er een cyclus met 2^m elementen ontstaat. De a-waarden nemen met steeds kleinere waarden toe. Deze staan in de derde kolom. Het viel de natuurkundige Mitchell Feigenbaum op dat die rij $a_1, a_2, a_3, \ldots$ tot een zekere limietwaarde nadert op de wijze van een meetkundige rij. Hij leidde dit af uit het verschijnsel dat de verschillen tussen twee opvolgende a-waarden steeds met ongeveer dezelfde factor 4.669 kleiner worden. Een heel nauwkeurige berekening, uiteraard met de computer, gaf de waarde:

$F = 4.6692016...$

Op zichzelf was dit nog niet zo bijzonder. Feigenbaum besteedde er aanvankelijk dan ook weinig aandacht aan. Toen hij echter later een heel ander model onderzocht – $x_{n+1} = a \sin(\pi x_n)$ – vond hij niet alleen hetzelfde verschijnsel, maar ook precies dezelfde F-waarde. Kortom, het bleek om een *universeel* verschijnsel te gaan dat overal optreedt zodra er sprake is van een herhaalde periodeverdubbeling. F is een universele constante, net zo iets als π of e, het grondtal van de natuurlijke logaritme. Sindsdien staat F bekend als het *getal van Feigenbaum*.
Toen dit eenmaal bekend werd, bleek dat getal op te duiken bij uiteenlopende fysische experimenten die iets met een zogenaamde fase-overgang te maken hebben. Een voorbeeld is het gedrag van helium in de buurt van het absolute nulpunt. Dit alles is een fraaie demonstratie van het samengaan van ogenschijnlijk puur wiskundig onderzoek, computerexperimenten en de realiteit van de fysische werkelijkheid.

Orde en chaos Het hier beschreven verschijnsel van periodeverdubbeling aan de hand van het model $x \rightarrow ax(1-x)$ doet een beetje denken aan een fractal gebaseerd op het tweetallig talstelsel waarbij de schaalfactor van de gelijkvormigheid ongeveer gelijk is aan het getal van Feigenbaum. De periodeverdubbeling van het model (A) eindigt bij de waarde $a_\infty = 3.569946$. De vraag is wat er daarna gebeurt tot aan $a = 4$. Welnu, genoeg om een boek mee te vullen. We moeten ons hier dan ook de uiterste beperking opleggen. Kort gezegd, voor $a_\infty < a \leq 4$ gedraagt het model zich òf chaotisch òf periodiek. Zo is er een klein intervalletje in de buurt van $a = 3.83$ waar een stabiele cyclus van drie elementen optreedt, een zogenaamd venster van periodiciteit.
Laten we a een weinig toenemen tot aan de waarde 3.841, dan wordt die cyclus instabiel en gaat over in een stabiele 6-cyclus, dus weer periodeverdubbeling. Dat is opnieuw het begin van een heel scala van verdubbelingen 3, 6, 12, 24, ... net als hiervoor beschreven. Alles herhaalt zich dus op kleinere schaal. Overigens wordt ook deze periodeverdubbeling weer beheerst door het getal van Feigenbaum. Tussen a_∞ en 4 zijn nog veel meer venstertjes waarvoor het model periodiek is, aftelbaar oneindig veel zelfs. Toch blijven er nog onaftelbaar veel waarden van a over waarvoor het model zich chaotisch gedraagt.



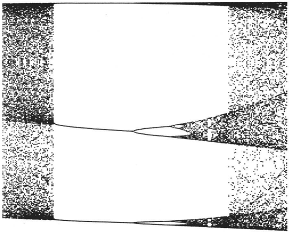
Figuur 6.9 Orde en chaos in het model van geremde groei $x \rightarrow ax(1-x)$.
A $a=2.9$ *enkelvoudig limietpunt*
B $a=3.0$ *overgang tot 2-cyclus*
C $a=3.2$ *2-cyclus*
D $a=3.5$ *4-cyclus*
E $a=3.74$ *5-cyclus*
F $a=3.83$ *3-cyclus*
G $a=4.0$ *volledige chaos*

In figuur 6.9 is dit veelsoortige gedrag grafisch zichtbaar gemaakt. Horizontaal is de parameter a uitgezet van 2.9 tot 4. Verticaal zijn de waarden van x_n volgens het iteratie-proces (A) uitgezet. Daarbij is n zo groot dat de waarden praktisch die van de limietsituatie $n \rightarrow \infty$ zijn. Voor $2.9 \leq a \leq 3$ is dit het enkele evenwicht $1-1/a$, voor $3 \leq a \leq 3.4495$ komt er een 2-cyclus, daarna een 4-cyclus, enzovoort. Omdat we a met kleine stapjes laten toenemen, gaan details verloren. Maar verderop is het grote venster met een stabiele

3-cyclus duidelijk zichtbaar en bij voorbeeld een kleiner venster met een stabiele 5-cyclus.

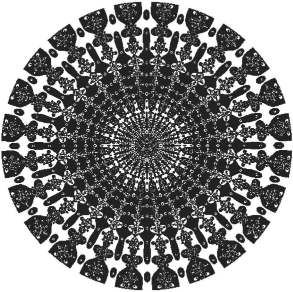
De figuur bezit een hoge graad van zelfgelijkvormigheid. We bekijken bij voorbeeld het gedeelte in de omgeving van een der punten van de stabiele 3-cyclus. Met ongeveer hetzelfde computerprogramma (COLLET, genoemd naar een der eerste onderzoekers) geeft figuur 6.10 het gedeelte voor het traject $3.835 < a < 3.855$. Alles van figuur 6.9 komt daar weer op kleinere schaal in terug. Zo kunnen we eindeloos doorgaan. Hetzelfde zouden we hebben waargenomen bij elk ander element van een stabiele cyclus!

Figuren als 6.9 en 6.10 zijn vooral nuttig als grafisch computerexperiment om snel inzicht en overzicht te krijgen in de eigenaardigheden van een iteratief model van het type $x \to f(x)$ waarvan (A) een speciaal geval is. Die figuren kunnen worden beschouwd als voorlopers van de fractals van Mandelbrot die in het volgende hoofdstuk worden beschreven.

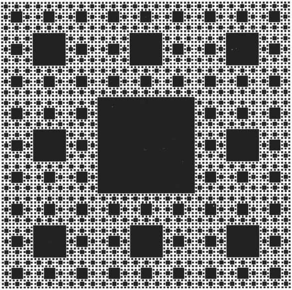


Figuur 6.10 Detail van het vorige diagram rond a=3.83 waar een 3-cyclus ontstaat en zich gaat vertakken.

'Roosfractal'

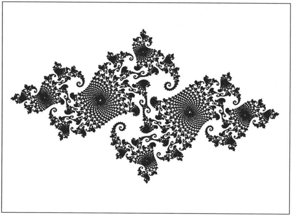


Spons van Menger



Poincaré, Julia, Mandelbrot

Dit hoofdstuk voert ons langs de toppen van het hooggebergte van fractalland. Het ene na het andere panorama zal zich ontvouwen. Onze gids is Mandelbrot die zich met niet aflatend enthousiasme heeft beijverd de fractals onder de aandacht van wiskundigen, natuurkundigen en kunstenaars te brengen. Velen heeft hij geïnspireerd met zijn bijzondere vondsten en zijn originele computerexperimenten. Een bijzonder soort fractals draagt tegenwoordig zijn naam. Ze geven aanleiding tot reeksen fantastische voorstellingen in kleur, als men tenminste beschikt over een krachtige computer. De zelfgelijkvormigheid van een wiskundig gedefinieerde fractal geeft de mogelijkheid willekeurig kleine details tot zelfstandige kleurenplaten te vergroten, een mogelijkheid die door Mandelbrot en wiskundigen als H.-O. Peitgen en Sh. Ushiki op grootscheepse wijze is uitgebuit. We komen daarbij in het grensgebied van wiskunde en kunst. Het uitgangspunt is een wiskundig model, maar de keuze van het detail en de selectie van de kleuren is kunst.
Mandelbrot is van Franse origine en het is dan ook geen toeval dat veel van zijn computerexperimenten aansluiten op het werk van zijn landgenoot Gaston Julia (1893-1978). Deze publiceerde in 1919 een met een prijs bekroonde studie. Daarin legde Julia de grondslagen van de wiskundige theorie van een type fractals dat is bepaald door een zogeheten iteratieve conforme afbeelding. Een



Julia-fractal type (A)

conforme afbeelding is een transformatie die hoeken onveranderd laat. Het belangrijkste voorbeeld is:

$$(A) \begin{cases} x' = x^2 - y^2 + a \\ y' = 2xy + b \end{cases}$$

waarbij a en b willekeurige getallen zijn. Voor elke waarde van a en b komt er een fractal! Dergelijke fractals worden tegenwoordig naar Julia genoemd. Ze kunnen vrij eenvoudig op het beeldscherm van een microcomputer te voorschijn worden gebracht, wanneer men niet te hoge eisen aan het oplossend vermogen stelt en bescheiden is in het gebruik van kleuren. Wanneer men zich in het hooggebergte bevindt, kan men ook met een eenvoudige camera fraaie foto's in zwart en wit maken.

Veel lijnen van onderzoek komen samen bij de Fransman Henri Poincaré (1854-1912), omstreeks de eeuwwisseling een van de meest universele wiskundigen. Met zijn werk, onder andere over de beweging van de hemellichamen, legde hij de theoretische grondslagen van wat nu dynamische systemen heet. Dit is een omvangrijk gebied dat wordt gekenmerkt door begrippen als deterministische chaos en zelfgelijkvormigheid. Voor de fractals zijn in het bijzonder iteratieve vlakke afbeeldingen van belang, zogenaamde poincaré-afbeeldingen. Als dynamisch systeem zijn deze afbeeldingen conservatief of maatbehoudend, wat wil zeggen dat een klein cirkeltje wordt getransformeerd in een klein ellipsje met dezelfde oppervlakte.

In 1969 onderzocht de Franse wiskundige en astronoom M. Hénon wat misschien wel het eenvoudigste wiskundige model is:

$$(B) \begin{cases} x' = y \\ y' = -x + 2ay + y^2 \end{cases}$$

Deze afbeelding in iteratieve vorm staat model voor een uiteenlopend scala van fysische verschijnselen, niet alleen de beweging van hemellichamen, maar ook de wisselwerking van elementaire deeltjes. Veel computerexperimenten toonden Hénon en anderen na hem allerlei facetten van zelfgelijkvormigheid en chaos, kortom fractalachtige structuren. Poincaré had ze voorspeld, maar eerst met de technologie van de moderne computer konden ze zichtbaar worden gemaakt. Ook hier naderen we weer het grensgebied van wiskunde en kunst. Met modellen van het type (B) kunnen fractalachtige puntenwolken, fractalstof, worden gecreëerd die Franse onderzoekers 'esthetische chaos' noemen. We zullen daarvan een aantal voorbeelden beschrijven.

De meeste, zo niet alle illustraties in dit hoofdstuk kunnen met betrekkelijk weinig moeite met een microcomputer worden verkregen, althans in benadering. Met de programma's uit appendix B kunnen door het kiezen van andere getalwaarden, nog veel meer fractals worden gevormd. In het laatste hoofdstuk, bestemd voor de doe-het-zelver, worden nog een aantal voorbeelden (onder andere

varianten van (B)) gegeven waarmee men naar hartelust kan experimenteren.

Hemelmechanica

Al bij de aanvang van de menselijke beschaving heeft de mens zijn aardse bezigheden laten leiden door de banen van hemellichamen: zon, maan, planeten, sterren en kometen. Aan het begin van onze jaartelling was de astronomie een indrukwekkende wetenschap geworden. Met wiskundige methoden en numerieke tabellen konden de vele waarnemingen beschreven en geordend worden. Men wist dat de aarde rond was en men kon redelijke schattingen geven voor de straal van de aardbol en voor de afstand van de aarde tot de maan.
De Griekse wetenschap werd in de tweede eeuw afgesloten met het werk van Claudius Ptolemaeus (90-168), een voorloper van Newton! Ptolemaeus had een nauwkeurige, maar tamelijk ingewikkelde theorie opgesteld om de banen van de planeten, zoals wij die waarnemen, te kunnen verklaren. Men zou zich een radarwerk van kosmische schaal moeten voorstellen waarin een groot aantal tandwielen, grote, kleine en heel kleine, met elkaar in wisselwerking stonden. Deze theorie van Ptolemaeus staat bekend als de epicykeltheorie: cirkels op cirkels op cirkels ... . Wij proeven hierin het beginsel van de zelfgelijkvormigheid, een kosmische beweging met de structuur van een fractal!
Het wetenschappelijk erfgoed van de Grieken bleef behouden dank zij de opkomst van de Arabische cultuur. Het werk van Ptolemaeus leefde voort als de Almagest, het handboek van de astronomie in de Middeleeuwen, totdat met Nicolaus Copernicus (1473-1543) in 1543 een nieuw tijdperk een aanvang nam. Door de zon in het middelpunt te plaatsen, kon hij de theorie van Ptolemaeus aanzienlijk vereenvoudigen met een reductie van 77 epicykels tot 31.
De volgende stap werd zo'n vijftig jaar later gezet door Johannes Kepler (1571-1630). Zich baserend op nauwkeurige waarnemingen van de Deense astronoom Tycho Brahe (1546-1601) kwam hij, na veel proberen, tot de ontdekking dat de planeten zich in ellipsvormige banen om de zon bewogen en dat daarbij de zon in het brandpunt stond.
Het was aan Isaac Newton (1642-1727) voorbehouden het werk van zijn illustere voorgangers tot een apotheose te voeren. Omstreeks vierentwintig jaar oud formuleerde hij de wet van de zwaartekracht. Hij toonde aan dat alle voorwerpen, van klein tot groot, van zandkorrel tot planeet aan een zelfde universele wet waren onderworpen. Tegelijk ontwikkelde hij ook de nodige wiskundige methoden om de banen van hemellichamen in wiskundige vergelijkingen uit te kunnen drukken. De door Kepler louter experimenteel gevonden wetten konden nu door Newton theoretisch worden verklaard.
Aan het einde van de vorige eeuw wijdde Henri Poincaré een uit-

voerige studie aan de 'mécanique céleste' of hemelmechanica. Hij liet zien dat de beschrijving van Newton weliswaar deterministisch is, maar dat de bewegingen van elkaar aantrekkende hemellichamen zeer gecompliceerd kunnen zijn. Zó gecompliceerd zelfs dat hun gedrag op den duur onvoorspelbaar en chaotisch is. De situatie is geheel te vergelijken met de deterministische chaos waarover we in het vorige hoofdstuk hebben gesproken bij de behandeling van het model $x \to ax(1-x)$. Met deze studie werden de grondslagen gelegd voor wat nu *dynamische systemen* wordt genoemd.

Rechts
Binair verdeelde
Julia-fractals

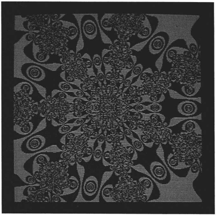
Model van Poincaré Poincaré en velen na hem hebben duidelijk gemaakt dat veel inzicht in het soms buitengewoon ingewikkelde gedrag van dynamische systemen kan worden ontleend aan heel eenvoudige wiskundige modellen. Poincaré vermoedde al een soort fractalachtige structuur. Er moest echter meer dan een halve eeuw voorbijgaan, voordat de techniek zover was dat die fractals op het beeldscherm van een computer werkelijk zichtbaar konden worden gemaakt.
We beschouwen hier maar één modeltype, een iteratieve transformatie van punten in het platte vlak:

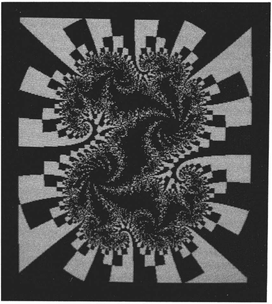
$$(C)\ \begin{cases} x_{n+1} = f(x_n,y_n) \\ y_{n+1} = g(x_n,y_n) \end{cases}$$

waarbij f en g functievoorschriften zijn.
Dergelijke iteratieve transformaties zijn we onder andere tegengekomen bij rotaties, spiegelingen, enzovoort. Zo is:

$$(D)\ \begin{cases} x_{n+1} = x_n \cos\alpha - y_n \sin\alpha \\ y_{n+1} = x_n \sin\alpha + y_n \cos\alpha \end{cases}$$

het model van een rotatie waarbij met elke iteratiestap het beeldpunt (x_n,y_n) om de oorsprong over een hoek α draait. Is P_0 met coördinaten (x_0,y_0) het beginpunt, dan liggen de volgende punten P_1, P_2, P_3, ... met P_0 op een cirkel om de oorsprong. De puntenrij P_0, P_1, P_2, ... noemen we de baan van P_0.
Onder bijzondere omstandigheden sluit de baan zich en reduceert zich tot een beperkt aantal punten, een zogenaamde periodieke cyclus. Is bij voorbeeld $\alpha = \pi/3$, dan ontstaat een cyclus van zes punten. Is $\alpha = 5\pi/7$, dan gaan we in veertien stappen precies vijf keer de cirkel rond. Steeds wanneer α/π een echte breuk (een rationaal getal) is, krijgen we een periodieke cyclus. Is echter α/π een onmeetbaar getal, dan bestaat de baan van een willekeurig punt uit oneindig veel punten op een cirkel die door die punten volledig wordt gevuld.
Bij de door Poincaré beschouwde modellen (C) is de transformatie $x \to f(x,y)$, $y \to g(x,y)$ oppervlaktebehoudend. Dit betekent dat een willekeurig cirkeltje getransformeerd wordt in een gesloten kromme met dezelfde oppervlakte.



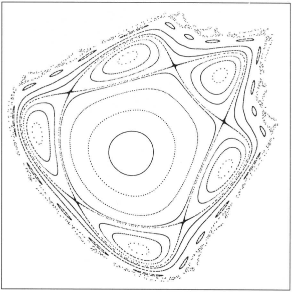


Model van Hénon In 1969 onderzocht M. Hénon het iteratieve model:

$$(E)\begin{cases} x_{n+1} = ax_n - b(y_n - x_n^2) \\ y_{n+1} = bx_n + a(y_n - x_n^2) \end{cases}$$

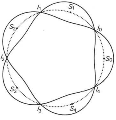
waarbij $a = \cos\alpha$ en $b = \sin\alpha$. In de aanloop van dit hoofdstuk is dit model gepresenteerd als de vlakke afbeelding (B) die er op het eerste gezicht heel anders uitziet. Een kleine berekening laat echter zien dat (B) en (E) volledig equivalent zijn. Ze verschillen slechts in een interpretatie van de y-coördinaat. Wie het zelf wil narekenen moet in (E) de uitdrukking $ax_n - b(y_n - x_n^2)$ vervangen door v_n wat een definitie van een andere y-coördinaat, aangeduid met v, inhoudt. Wiskundigen zullen geen moeite hebben om aldus uit (E) de versie (B) af te leiden. Zij zullen evenmin moeite hebben om na te gaan dat het model (E) oppervlaktebehoudend is.
Overigens zien we zonder rekenen dat (E) maar heel weinig verschilt van de rotatie (D) als x_n zó klein is dat het kwadraat x_n^2 verwaarloosbaar is ten opzichte van de lineaire termen x_n en y_n.
In figuur 7.1 hebben we een van Hénons resultaten verkregen met het programma HENON afgebeeld. Weergegeven zijn een aantal banen voor het geval $a = 0.24$, $b = 0.9708$ corresponderend met $\alpha = 76.1135^0$, dus in vijf stappen iets meer dan één keer rond.
In figuur 7.1 zijn verschillende soorten banen te ontdekken. De oorsprong O is een evenwicht en vormt aldus een baan die uit één

Figuur 7.1 Experiment van Hénon.

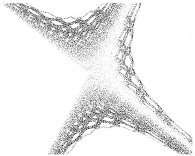


enkel punt bestaat. Erom heen zien we gesloten cirkelvormige banen waarbij de puntenrij zich aaneenrijgt tot een bijna gesloten kromme, overal dicht bedekt met baanpunten of waarbij de puntenrij zich reduceert tot een periodieke cyclus.
Een opvallend verschijnsel vormen de vijf nesten gesloten krommen, een eilandenstructuur. Het getal vijf heeft natuurlijk te maken met het feit dat de afbeelding dicht bij de oorsprong slechts weinig van een vijftallige rotatie verschilt. De centra van die vijf eilandengroepen vormen zelf een periodieke cyclus van vijf elementen.
Ten slotte zien we ook een buitenste baan met een onregelmatige structuur, een zogenaamde chaotische baan.

Figuur 7.2 Schema van een structuur met vijf eilanden.



Interpretatie De oorsprong kan worden geïnterpreteerd als een stabiel evenwicht. Dit betekent dat een baan die in de buurt van dat evenwicht begint, ook in de buurt ervan blijft en hier dus op een nagenoeg cirkelvormige kromme ligt. Datzelfde geldt voor de centra van de periodieke 5-cyclus. Bij elke iteratiestap van (E) verspringen ze een plaats en na vijf stappen zijn ze weer op hun oude plaats terug. Duiden we de door (E) bepaalde 'bijna-rotatie' symbolisch aan met **E** en vatten we $\mathbf{E}^5$ op als de vijfvoudige herhaling daarvan, dan zijn de genoemde vijf periodieke punten gewone evenwichten geworden, zoals de oorsprong een gewoon evenwicht was voor **E**. Dit is de eerste aanwijzing voor de zelfgelijkvormigheid die in de figuur besloten ligt en die kenmerkend is voor dit type van dynamische systemen.

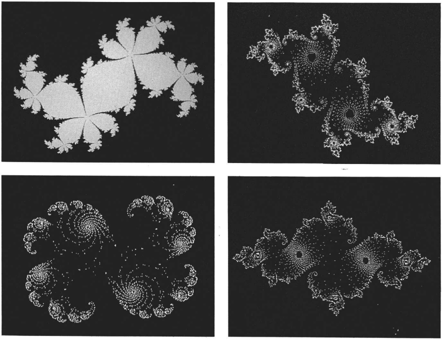


Figuur 7.3 Detail van een chaotische baan in het experiment van Hénon.

We letten nog op de eilandstructuur om elk van deze vijf punten. Verwijderen we ons, heel voorzichtig, van die punten, dan zien we bij elk volgend beginpunt van een baan dat de eilanden in grootte toenemen totdat ze elkaar raken. Deze situatie is geschetst in figuur 7.2. Daarin zijn I_0, I_1, I_2, I_3 en I_4 de raakpunten van de grootste eilanden. Ook zij vormen een periodieke cyclus. De centra van de eilanden, eigenlijk de kleinste eilanden, vormen de periodieke cyclus S_0, S_1, S_2, S_3, S_4. Deze S-cyclus is stabiel. Een baan die bij voorbeeld in S_0 begint, passeert de omgevingen van S_1, S_2, S_3 en

S_4 en komt weer terug in de omgeving van S_0. Dat gaat zo door en het resultaat is een vijftal eilandjes die weer dichtgevuld met punten kunnen zijn, of een cyclus met een hogere periodiciteit.
De I-cyclus daarentegen is instabiel. Theorie en experiment laten zien dat een baan die begint in een van de instabiele punten, bij voorbeeld I_0, chaotisch is. Deze chaos is te vergelijken met de deterministische chaos die we in het vorige hoofdstuk aan de hand van het model $x \rightarrow ax(1 - x)$ hebben besproken. In figuur 7.3 is een gedeelte van de chaotische baan weergegeven die begint in het punt $x_0 = 0.57$, $y_0 = 0.16$ vlakbij I_0. Het plaatje spreekt voor zich. Kenmerk van zo'n chaotische baan is de praktische onvoorspelbaarheid van de toekomst. Afgerond in vier decimalen zijn de coördinaten van I_0, $x_0 = 0.5696$, $y_0 = 0.1622$. Na honderd iteratiestappen vinden we $x = 0.5386$, $y = 0.1864$. Toch nog een beetje in de buurt. Waren we echter begonnen met $x_0 = 0.57$, $y_0 = 0.16$, dan komt er $x = 0.3176$, $y = 0.4202$. Heel ergens anders dus. Dit demonsteert het kenmerk van de deterministische chaos. Wat aanvankelijk dicht bij elkaar is raakt op den duur steeds verder uit elkaar.

De theorie van Poincaré zegt dat figuur 7.1 vol zit met ringstructuren van het type van figuur 7.2. Stabiele en instabiele perioden wisselen elkaar af. De stabiele evenwichten worden omgeven door stabiele banen, eilandjes. De instabiele evenwichten worden omgeven door chaotische banen. Het blijkt dat in veel gevallen de chaotische banen een ringvormige structuur hebben en zelf begrensd worden door stabiele banen. In figuur 7.3 ziet men inderdaad dat de chaotische baan omgeven is door niet-afgebeelde gedeelten van grote eilanden.
De door de afbeelding **E** bepaalde structuur bestaat dus uit periodieke cycli, stabiel of instabiel, uit stabiele, een gesloten kromme opvullende, banen en uit instabiele chaotische banen. Die structuur is algemeen en geldt in principe voor elke oppervlaktebehoudende transformatie (C).
We hadden al een begin van zelfgelijkvormigheid ontdekt bij de overgang van **E** naar $\mathbf{E}^5$, de vijfmaal herhaalde afbeelding **E**. Voor $\mathbf{E}^5$ gedraagt elk groot eiland in figuur 7.1 zich als een zelfstandige structuur die van dezelfde globale aard is als de totale figuur. Daarbij heeft bij voorbeeld S_0 de rol van de oorsprong overgenomen. Alles wat gezegd is voor de grote figuur, geldt ook voor elk der vijf eilanden. Dus wederom orde, chaos en kleinere eilandstructuren.
Zo kunnen we blijkbaar eindeloos doorgaan met een zich steeds herhalende microstructuur van eilandjes waarin zich eilandjes bevinden waarin ... . Vaak kunnen we een deel van die microstructuur zichtbaar maken, uiteraard met behulp van de computer, door een of meer chaotische banen af te beelden. De weg om tot fraai ogende computerplaatjes te komen is daarmee aangegeven. Men 'verzint' een model van het type (C) waarbij f en g wel zodanig moeten zijn dat de transformatie oppervlaktebehoudend is, en men experimenteert met de microcomputer.



Julia-fractals type (A)

Er is een aardige methode om tot een goed model te komen. Die methode berust op een zogenaamd tweestaps-iteratief model:

$$(F)\quad x_{n+1} + x_{n-1} = 2F(x_n)$$

waarbij $F(x)$ een willekeurig te kiezen functie van de variabele x is. De betekenis van zo'n model lichten we toe aan de hand van het model van Fibonacci dat de ongeremde groei beschrijft van bij voorbeeld een konijnenplaag.
Het aantal vrouwelijke konijnen per generatie volgt de rij:

1 1 2 3 5 8 13 21 ...

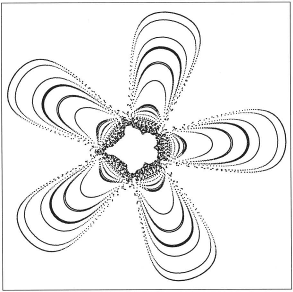
Noemen we $x_0 = 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 5$, enzovoort, dan is dus $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$. Hieruit volgt de algemene regel dat het aantal op het 'tijdstip' $n+1$ is bepaald door de aantallen op het 'tijdstip' n èn het eerdere 'tijdstip' $n-1$. Als aardigheid kan worden gezegd dat in dit speciale geval voor x_n een exacte uitdrukking kan worden afgeleid en dat bij benadering $x_n \approx (1.618)^{n+1}/\sqrt{5}$, waarbij 1.618 het gulden-snede-getal $(-1 + \sqrt{5})/2$ is.
Uit (F) kunnen we een iteratieve tweedimensionale afbeelding afleiden door $x_{n+1} = y_n$ te stellen en de daarmee geïntroduceerde tweede variabele y_n met x_n op te vatten als de coördinaten van een punt in het platte vlak.
De vertaling van (F) is dan:

$$(G)\quad \begin{cases} x_{n+1} = y_n \\ y_{n+1} = -x_n + 2F(y_n) \end{cases}$$

Gumowski en Mira Natuurkundigen getroosten zich veel moeite om achter de geheimen van de natuur te komen door elementaire deeltjes met elkaar in wisselwerking te laten treden. Zulke experimenten worden onder andere uitgevoerd in Genève bij de CERN, een Europees samenwerkingsverband. Daarbij worden aan de apparatuur hoge eisen gesteld. Men moet namelijk elementaire deeltjes als protonen in een zogenaamde opslagring, een kilometers lang cirkelvormig kanaal met de doorsnede van een conservenblikje, met hoge snelheid laten rondbewegen. Hun banen dienen stabiel te zijn. Dat zich daarbij talloze technische en wiskundige problemen voordoen, is te begrijpen. De natuurkundigen, of wiskundigen, Gumowski en Mira onderzochten daarbij een model van het type (F) of (G). In hun boeken en publikaties tonen zij talloze illustraties van computerexperimenten met vele voorbeelden van 'chaos esthétique'. Hun voornaamste model is de keuze:

$$F(x) = ax + 2(1-a)x^2/(1+x^2)$$

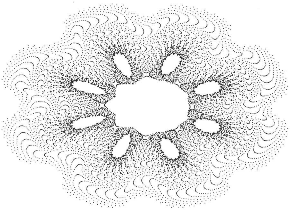
waarbij a een willekeurig te kiezen parameter is.
Voor $a = 1$ reduceert $F(x)$ zich tot x. Het model (G) is dan volledig



Figuur 7.4 Esthetische chaos in het model van Mira.

regelmatig, alles is stabiel en chaos is afwezig. Naarmate a meer van 1 afwijkt, komt er meer chaos en worden de computerplaatjes interessanter. We geven hieronder een paar voorbeelden die berusten op het programma MIRA. Overigens gebruiken we daarbij in plaats van (G) een iets andere, maar gelijkwaardige beschrijving:

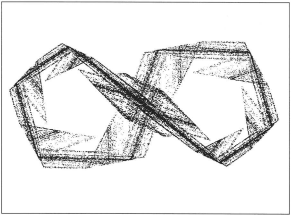
$$(\mathrm{H}) \begin{cases} x_{n+1} = y_n - F(x_n) \\ y_{n+1} = -x_n + F(x_{n+1}) \end{cases}$$



Figuur 7.5 Een naar binnen spiraliserende baan in het model van Mira.

Deze formulering levert een fractalstructuur die symmetrisch is ten opzichte van de X-as.
Figuur 7.4 geeft een enkele chaotische baan weer, althans de eerste duizend punten, van het model (H) voor $a = 0.31$ met beginpunt (12,0).
Vervangen we in de tweede vergelijking van (H) de term $-x_n$ door $-bx_n$ met $b = 0.9998$, dan wordt het resultaat figuur 7.5. Dat heel kleine verschil heeft dramatische gevolgen. De transformatie is niet meer oppervlaktebehoudend, maar oppervlakten worden met de factor b verkleind. Dat heeft tot gevolg dat banen een neiging hebben om spiraliserend naar binnen toe te gaan. In figuur 7.5 is dan ook een enkele baan weergegeven uitgaande van het punt (15,0) voor het geval $a = 0.7$.

Figuur 7.6 Strik als fractal.



Strange attractor Iteratieve processen van het type (C) die niet oppervlaktebehoudend zijn, kunnen soms aanleiding geven tot fraaie fractalachtige plaatjes. Die plaatjes zijn onafhankelijk van de keuze van het beginpunt en (bijna) alle banen lijken te leiden tot dezelfde limietfiguur. Wiskundigen spreken van een 'strange attractor' of vreemde aantrekker. Het woord 'strange' drukt de verbazing uit van wiskundigen, toch wel wat gewend, toen zij voor het eerst dergelijke figuren op het beeldscherm zagen verschijnen. Figuur 7.6 toont een enkel voorbeeld. De iteratieve afbeelding is:

$$\begin{cases} x_{n+1} = (2-a)x_n - by_n \\ y_{n+1} = -bx_n + ay_n \end{cases}$$

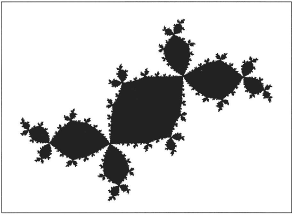
voor $|x_n| < 1/2$ en:

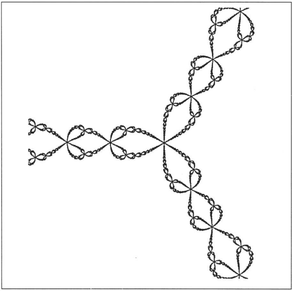
$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n - by_n + (1-a)\text{sgn } x_n \\ y_{n+1} = bx_n + ay_n - b \text{ sgn } x_n \end{cases}$$

voor $| x | \geqslant 1/2$.

De 'strange attractor' ziet eruit als een op wonderbaarlijke wijze gevouwen strik.

Julia-fractals

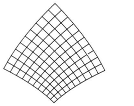




Fractals van Julia

Nu een der hoogtepunten, alom bestudeerd door wiskundigen en computerkunstenaars. Eens bestonden ze slechts in het brein van de Franse wiskundige Gaston Julia. Hij schreef in 1919 een uitvoerige 'mémoire' van een paar honderd pagina's die door de Franse Akademie bekroond werd. Het is inderdaad, ook voor wiskundigen uit onze tijd, een indrukwekkend verhaal, geschreven in een goed leesbaar Frans, maar... plaatjes zal men er niet of nauwelijks in aantreffen. De inhoud is zo'n halve eeuw verwaarloosd, maar nu bevindt het zich in het centrum van de aandacht. Computers hebben zichtbaar gemaakt wat in de tijd van Julia nog onmogelijk was. De resultaten overtreffen in visueel opzicht de stoutste verwachtingen. Een recent boek als dat van Peitgen en Richter met de veelbelovende titel *The beauty of fractals* bevat naast een aantal wiskundige beschouwingen, alleen verstaanbaar voor specialisten, een grote hoeveelheid plaatjes van fractals in een veelkleurige uitmonstering, even zovele voorbeelden van computerkunst. De mooiste plaatjes zijn verkregen met krachtige computers die het budget van een particulier verre te boven gaan. Toch kunnen de fractals van Julia vrij eenvoudig op het beeldscherm van een microcomputer te voorschijn worden gebracht, maar dan moet men wel genoegen nemen met minder details en eventueel afzien van kleuren.

Figuur 7.7 Conforme afbeelding van een dambord.



Het werk van Julia betreft iteratieve afbeeldingen zoals beschreven door (C), maar hier bezit de afbeelding $x \rightarrow f(x,y)$, $y \rightarrow g(x,y)$ de eigenschap dat alle hoeken gelijk blijven. Een vierkant gaat dus over in een ander vierkant waarvan de zijden wel gebogen mogen zijn. Zo geeft figuur 7.7 aan wat er bij voorbeeld met een dambord kan gebeuren. De betrokken afbeelding is:

$$\text{(I)} \begin{cases} x' = x^2 - y^2 \\ y' = 2xy \end{cases}$$

De positie van het dambord is bepaald door $1 \leq x \leq 2$, $1 \leq y \leq 2$. Wiskundigen kunnen vaststellen dat de rechte lijnen uit het oorspronkelijke dambord over zijn gegaan in bogen van parabolen.

Een afbeelding als (I) die hoeken intact laat, heet *conform*. Conforme afbeeldingen komen in de wiskunde en de toepassingsgebieden vrij veel voor. Ze worden onder andere gebruikt bij modellen van grondwaterstroming en ze leveren profielen van vliegtuigvleugels. Het theoretisch inzicht berust op het werken met complexe getallen en complexe functies. Omdat de theorie van de complexe getallen niet tot de traditionele schoolstof behoort, zwijgen we er in dit hoofdstuk over. Wel laten we in appendix A zien hoe nuttig complexe getallen kunnen zijn, ook voor computergraphics en fractals. Ook de iets algemenere afbeelding (A) geschreven in iteratieve vorm is conform:

$$\text{(J)} \begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a \\ y_{n+1} = 2x_n y_n + b \end{cases}$$

waarbij a en b willekeurige constanten zijn.

Verzameling van Julia Met dit model zullen we ons voorlopig bezighouden. Er is een wereld van fractals in verborgen, zoals we spoedig zullen ervaren.
Met Julia letten we weer op de baan van een willekeurig beginpunt $P_0(x_0,y_0)$. We kunnen constateren dat in een aantal gevallen de baan naar oneindig wegvlucht. Dat is zeker het geval wanneer P_0 een grote afstand tot de oorsprong O heeft. Men kan nagaan dat alle punten P_0 waarvoor geldt:

$$OP_0 > 1 + (a^2 + b^2)^{1/4}$$

inderdaad zo'n baan opleveren. Door oneindig aangetrokken, zegt men wel. De punten P_0 in het platte vlak kunnen we verdelen in punten waarvoor de baan door oneindig wordt aangetrokken, en punten waarvoor dit niet zo is. De eerste groep punten vormt het zogenaamde aantrekkende gebied van oneindig. De rand van dat gebied, een soort waterscheiding, heet tegenwoordig een verzameling van Julia (in het Engels Julia-set) en is bijna altijd een fractal!
Julia heeft voor deze verzameling een groot aantal eigenschappen bewezen waarvan we hier alleen de belangrijkste kunnen noemen. Gemakshalve duiden we de julia-verzameling van (A) aan met J of met $J(a,b)$ indien de waarden van de parameters vermeld moeten worden.
De eerste eigenschap van J is dat de conforme afbeelding $x \rightarrow x^2 - y^2 + a$, $y \rightarrow 2xy + b$, J in zichzelf transformeert, met andere woorden invariant laat.
De tweede eigenschap van J is dat een willekeurige baan die een punt op J heeft zich met al zijn punten op J bevindt. Anders gezegd, is P een punt van J, dan liggen ook al zijn opvolgers en al zijn voorgangers op J. Voor de computerpraktijk is van belang dat alle voorgangers van een punt J geheel overdekken. De conforme afbeelding (A) heeft de eigenschap dat een willekeurig punt twee voorgangers heeft. Om dat in te zien moeten we (A) ($x' = x^2 - y^2 + a$, $y' = 2xy + b$) opvatten als twee vergelijkingen waarin x' en y' gegeven zijn, en waaruit x en y moeten worden opgelost. Dat gaat als volgt:

$$x^2 - y^2 = x' - a$$

$$(x^2+y^2)^2 = (x^2 - y^2) + 4x^2y^2 = (x' - a)^2 + (y' - b)^2$$

zodat:

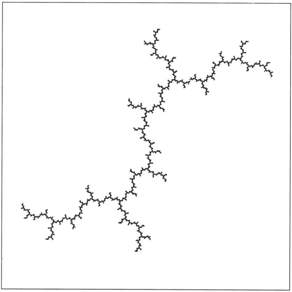
$$x^2 + y^2 = \sqrt{((x' - a)^2 + (y' - b)^2)}$$

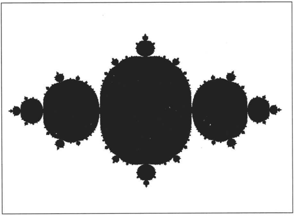
Van x^2 en y^2 kennen we som en verschil, zodat ze individueel bekend zijn, bij voorbeeld:

$$x^2 = \frac{1}{2}(x' - a) + \frac{1}{2}\sqrt{((x' - a)^2 + (y' - b)^2)}$$

Hieruit volgen twee waarden voor x, een positieve en een negatieve. Wanneer x bekend is, volgt y uit $y = (y' - b)/(2x)$.
We vinden dus dat de afbeelding (A) op twee manieren omgekeerd kan worden. Wiskundigen zeggen dat die transformatie een tweewaardige inverse heeft. Dat betekent voor het iteratieve systeem (J) dat een punt P_0 twee voorgangers heeft en dat die samen weer vier voorgangers hebben, enzovoort. Zo krijgen we weer de bekende tweetallige boomstructuur 1, 2, 4, 8, 16, ... Een punt van J genereert op die manier bij elke stap teruggaand tweemaal zoveel voorgangers. Volgens Julia verdelen die zich zó over J dat J volledig, overal dicht, wordt opgevuld.
Een volgende eigenschap van J is dat alle instabiele periodieke cycli zich op J bevinden. Een instabiel periodiek evenwicht stoot punten uit zijn omgeving af. J zit vol met dergelijke punten en is aldus een afstoter. Een baan van een punt P_0 dat zich niet op J bevindt, gaat er steeds verder vandaan. Een baan van een punt P_0 op J blijft op J en kan periodiek of chaotisch zijn.
Beschouwen we daarentegen het teruglopende iteratieve proces, waarbij dus volgens de boven gegeven berekening in (J) x_n en y_n op twee manieren uit x_{n+1} en y_{n+1} kunnen worden afgeleid, dan is J juist een aantrekker in plaats van een afstoter. Alle banen bewegen zich dan naar J toe òf blijven er op stabiele wijze op.

Figuur 7.8 Julia-fractal J(0,1), een dendriet.





Figuur 7.9 Julia-fractal J(-3/4,0), de San-Marco-fractal.

Julia-fractals Gewapend met de kennis die we in vorige hoofdstukken hebben opgedaan bij fractals met een binaire structuur, is het schrijven van een computerprogramma een eenvoudige zaak. We beginnen met een punt P_0 waarvan we zeker weten dat het op J ligt. Daarvan volgen we de teruglopende baan, hetzij volgens de Monte-Carlo-methode, hetzij systematisch volgens de backtrack-methode.

De laatste methode is gevolgd in het programma JULIAB. Daarin is gebruikgemaakt van de bovenstaande berekening om van een gegeven punt twee voorgangers te vinden. Zo is de fractal $J(0,1)$ van figuur 7.8 verkregen, een zogenaamde dendriet. Als beginpunt is $x_0 = -1.3002$, $y_0 = 0.6248$ gekozen, een instabiel dekpunt.

In figuur 7.9 is de fractal $J(-3/4,0)$ weergegeven. Mandelbrot was een der eersten die dit plaatje verkreeg. Hij gebruikte daartoe oorspronkelijk het boven beschreven teruglopende iteratieve proces waarvoor de julia-fractal een aantrekkende verzameling is. Het plaatje deed hem denken aan de beroemde San-Marco-kerk, weerspiegeld in het ondergelopen San-Marco-plein in Venetië. De julia-fractals van (A) zijn altijd puntsymmetrisch ten opzichte van de oorsprong. Wanneer, zoals hier, $b = 0$, zijn ze spiegelsymmetrisch ten opzichte van de X-as èn ten opzichte van de Y-as. Deze eenvoudige constatering kan in programma's worden gebruikt om tijd te besparen, om bij voorbeeld in een kwart van de tijd toch het volle werk te doen. Het loont de moeite het speciale geval $b = 0$ nog wat nader onder de loep te nemen.

Wanneer we in (A) $b = 0$ nemen en we gaan uit van een punt $P(x,y)$ op de X-as, dat wil zeggen een punt waarvoor $y = 0$, dan volgt hieruit dat ook het beeldpunt $P'(x',y')$ op de X-as ligt, omdat dan ook $y' = 0$. Voor de corresponderende iteratieve afbeelding (J) betekent dit dat de baan van een punt op de X-as ook op de X-as ligt. Voor een dergelijke baan is (J) dus terug te brengen tot:

(K1) $x_{n+1} = x_n^2 + a$

Nu komt de verrassing. Deze iteratieve afbeelding is gelijkwaardig met het model van geremde groei uit het vorige hoofdstuk:

(K2) $\xi_{n+1} = \alpha\xi_n(1 - \xi_n)$

met een iets andere notatie. Om die gelijkwaardigheid in te zien hoeven we slechts de substitutie $\xi_n = 1/2 - x_n/\alpha$ uit te voeren. Uit (K2) volgt dan (K1) waarbij $a = \alpha/2 - \alpha^2/4$.

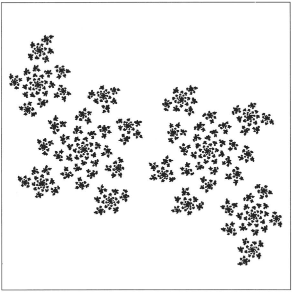
Een wat verdere analyse van deze fractal maakt duidelijk dat de San-Marco-fractal uit een reeks van oneindig veel eilanden bestaat die elkaar paarsgewijs op de X-as raken.

Figuur 7.10 geeft de fractal $J(0.1,0.66)$ weer. Het valt op dat in dit geval de figuur niet meer samenhangend is, maar uit losse punten bestaat, net als bij de puntverzameling van Cantor. Een dergelijke fractal pleegt men als 'fatou-stof' te beschrijven. Dit ter ere van de wiskundige Fatou, een tijdgenoot van Julia.

De julia-fractals van (A) geven aanleiding tot vele fraaie plaatjes, zeker wanneer men de mogelijkheid heeft er kleuren aan toe te voegen. Het boek van Peitgen en Richter toont er een aantal. In dit boek zijn een paar van die illustraties in zwart-wit opgenomen.

De Monte-Carlo-methode is gevolgd in het programma JULIAMC. Die methode geeft in vele gevallen snel een goede indruk van de Julia-set, maar in enkele bijzondere situaties blijven juist de mooiste details verborgen, zoals dat ook bij de vorige methode het geval was. Wie over een snelle computer beschikt en daarbij kleuren kan

Figuur 7.10 Julia-fractal J(0.1,0.66), verstoven bladeren.



gebruiken, kan veel plezier beleven met het programma JULIAP, dat op de zogenaamde pixelmethode berust. In beginsel wordt elke pixel van het beeldscherm beschouwd als het beginpunt van een baan. Afhankelijk van de eigenschappen van de baan wordt aan de pixel een bepaalde kleurwaarde toegekend. Een pixel op de Julia-set geeft een baan die noch convergeert en noch naar het oneindige gaat.

Speciaal geval Dit type fractals staan bij wiskundigen sterk in de belangstelling. Iets van hun methoden wordt duidelijk aan de hand van het speciale geval $a = b = 0$, dat wil zeggen (I). Dat model vervangen we door een overeenkomstig model in poolcoördinaten r,θ waarbij $x = r\cos\theta$ en $y = r\sin\theta$. Een kleine berekening laat zien dat het model (J) dan kan worden geschreven als:

$$r_{n+1} = r_n^2 \quad , \quad \theta_{n+1} = 2\theta_n \ (\text{mod } 2\pi)$$

De aard van de baan van een punt P_0 met poolcoördinaten r_0,θ_0 hangt alleen van r_0 af. Is $r_0 < 1$, dat wil zeggen ligt P_0 binnen de eenheidscirkel, of nog anders is de afstand van P_0 tot de oorsprong O kleiner dan 1, dan spiraliseert de baan naar de oorsprong. Is $r_0 > 1$, dan spiraliseert de baan naar oneindig. Is $r_0 = 1$, dan blijft de baan eeuwig rondzwerven over de eenheidscirkel. In dit wel heel speciale geval is de julia-fractal identiek met deze cirkel. Het kenmerkende uiterlijk van een fractal is dus verloren gegaan. Maar de zelfgelijkvormigheid van de cirkel blijft ten volle aanwezig.
Om wat inzicht te krijgen in de baan op de eenheidscirkel schrijven we $\theta_0/(2\pi)$ als een oneindig voortlopende breuk in tweetallige notatie $0.b_0b_1b_2b_3\ldots$ waarbij de wijzergetallen (de cijfers achter de punt) 0 of 1 zijn. We maken daarbij de afspraak om de beginhoek θ_0 tussen 0 en 2π te nemen. Alle volgende hieruit af te leiden hoeken brengen we terug tot datzelfde interval door er zo nodig 2π van af te trekken. We maken dat nog even duidelijk aan de hand van een voorbeeld. Is $\theta_0 = 2\pi/7$, dan is dus $\theta_1 = 4\pi/7$, $\theta_2 = 8\pi/7$, $\theta_3 = 16\pi/7 = 2\pi/7$, zodat $\theta_3 = \theta_0$. De baan sluit zich hier na drie stappen, zodat we een 3-cyclus hebben. Het is niet moeilijk nog een paar van die periodieke banen te construeren, bij voorbeeld (met weglating van de factor $2\pi/31$):

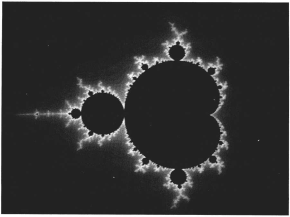
1	2	4	8	16
3	6	12	24	17
5	10	20	9	18
7	14	28	25	19
11	22	13	26	21
15	30	29	27	23

Dit systeem geeft meteen zes 5-cycli die uiteraard instabiel zijn. Op deze manier kunnen we eindeloos verder gaan. Wiskundigen hebben zo vast kunnen stellen hoe de eenheidscirkel volledig gevuld

is met periodieke banen en wel aftelbaar vele. Toch blijven er nog onaftelbaar veel niet-periodieke banen over met allerlei vormen van chaos.

Wat voor dit speciale geval gezegd is, geldt ook voor willekeurige julia-fractals. In appendix A staat hoe we met behulp van de rekenwijze van complexe getallen vrij gemakkelijk tot nog veel meer mooie julia-fractals kunnen komen.

Figuur 7.11 Fractal van Mandelbrot.



Mandelbrot

De fractals van Julia behoren tot twee hoofdtypen. Ze kunnen geheel onsamenhangend of geheel samenhangend zijn. In het eerste geval bestaat de fractal uit oneindig veel, onaftelbaar veel, losse punten. Het klassieke voorbeeld is de puntverzameling van Cantor uitgespreid over een lijnstuk.
In het tweede geval bestaat de fractal uit een aaneenschakeling van lijnen, soms een enkele gesloten kromme, soms lussen in lussen in lussen ..., soms een dendriet.
Bij de julia-fractals $J(a,b)$ van het model (A) hangt het type af van de getallen a en b. Mandelbrot kwam op de gelukkige gedachte hiervan een grafiek te maken door a en b op te vatten als de coördinaten van een punt en dat punt te markeren wanneer $J(a,b)$ samenhangend is. Op het eerste gezicht lijkt dat een nogal ingewikkeld probleem, maar Julia heeft een truc bedacht om uit te maken of $J(a,b)$ samenhangend is of niet, zonder $J(a,b)$ zelf te construeren. Het is namelijk voldoende om bij het iteratieve proces (J) de baan van het beginpunt $x_0 = a$, $y_0 = b$ te onderzoeken. Gaat die baan naar oneindig, dan is $J(a,b)$ onsamenhangend als stof. Met een eenvoudig computerprogramma kan dan voor een willekeurig punt worden getoetst tot welke klasse $J(a,b)$ behoort. Alle punten waar-

voor J samenhangend is vormen dan de zogenaamde verzameling van Mandelbrot. Het resultaat is figuur 7.11, een uiterst merkwaardige figuur die doet denken aan een samenklontering van vruchten, een zogenaamd 'appelmannetje'. Die structuur kan wiskundig goed begrepen worden. In appendix A over de complexe getallen, gaan we er wat verder op in. Het niervormige gedeelte wordt begrensd door een cardioïde of hartlijn. De wiskundige formulering is:

$$\begin{cases} 4a = 2\cos t - \cos 2t \\ 4b = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}$$

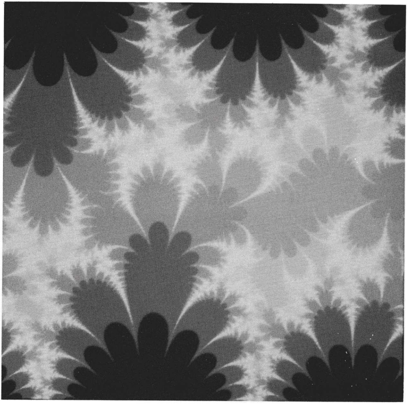
waarbij t van 0 tot 2π loopt.
Het aangrenzende cirkelvormige gedeelte is inderdaad een cirkel met middelpunt (–1,0) en straal 1/4. Eromheen bevindt zich een serie van kleine en heel kleine cirkelvormige gebiedjes. Nauwkeuriger plaatjes laten zien dat dit soort verschijnselen zich overal op steeds kleinere schaal blijft herhalen. Kortom, de door Mandelbrot gevonden figuur is een fractal!
Op de X-as weerspiegelt de mandelbrot-fractal het bifurcatiegedrag van (K1) of (K2), zoals we dat in het vorige hoofdstuk hebben gezien (figuur 6.9). In het bijzonder hebben we daarbij het verschijnsel van de periodeverdubbeling met universele schaling van Feigenbaum gesignaleerd. Dat verschijnsel werd gemarkeerd door de waarden α = 3, 3.4495, 3.5441, 3.5644, 3.5688,..., 3.5699. Die corresponderen hier met $a = -3/4$, $a = -5/4$ en verder met

Figuur 7.12 Detail van de fractal van Mandelbrot.

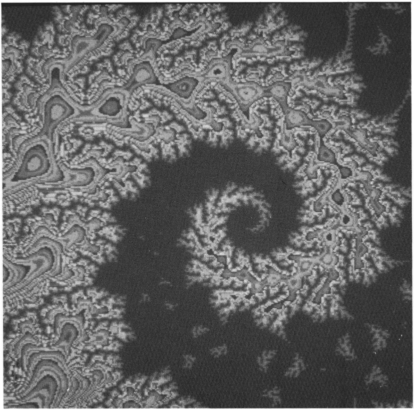
$a = -1.3681, -1.3940, -1.3996, ..., -1.4012$. Bij die waarden gebeurt er wat. Ze markeren raakpunten tussen cirkelvormige gebiedjes waarvan de diameters verkleind zijn volgens Feigenbaums constante. Diezelfde gebiedjes vinden we terug rondom grotere gebieden, enzovoort, enzovoort.
We hebben gezien dat er in de buurt van $\alpha = 3.83$ een omgeving is met een stabiele 3-cyclus. In de figuur van Mandelbrot correspondeert dit met een soort eiland op de plaats $a = -1.75$, $b = 0$. Bij nadere beschouwing blijkt dit eiland een 'continent' in miniatuur te zijn. Soortgelijke eilanden treffen we ook aan in de buurt van $a = -0.12$ en $b = \pm 0.74$; en ook die corresponderen weer met een stabiele 3-cyclus van Julia's model (J).
Toen Mandelbrot deze figuur voor het eerst op het beeldscherm zag ontstaan en papierafdruk of foto nader onderzocht, dacht hij eerst aan een enkel continent, de cardioïde met aangrenzende cirkels. Wat hij aanvankelijk voor fotografische stofjes hield, bleek bij successieve vergrotingen te bestaan uit miniatuur-continenten. Tot voor kort meende men inderdaad dat de mandelbrot-fractal aldus was opgebouwd uit een groot continent omringd door een eilandenrijk van aftelbaar oneindig veel miniatuur-continenten. Heel recent heeft een wiskundige echter kunnen bewijzen dat alles met kronkellijnen, als spinrag, aan elkaar vastzit! Zoiets zou met behulp van computerexperimenten nooit ontdekt, laat staan bewezen kunnen worden. Uiteindelijk is de mens toch weer baas over de machine!

Tegenwoordig kunnen goede illustraties van de Mandelbrot-set ook met huisapparatuur verkregen worden, zeker wanneer men beschikt over een computer van het MS-DOS type welke uitgerust is met minstens een 80287 processor en met een EGA/VGA adapter welke de mogelijkheid biedt van het gebruik van zestien kleuren in een resolutie van 640 × 480 pixels. In *Een wereld van fractals* gaan we daar op uitvoerige wijze op in. Hier beperken we ons, eenvoudiger, tot een enkel programma MANDEL dat een totaalbeeld van de mandelbrot-fractal verschaft zonder dat daarbij kleuren nodig zijn. De grootte van het plaatje kunnen we regelen met behulp van de parameter n_1, welke aangeeft dat de af te beelden rechthoek uit $2n_1 + 1$ verticale pixelrijen bestaat. Wie haast heeft kan beginnen met $n_1 = 50$ te kiezen, maar voor wie de tijd geen rol speelt zou $n_1 = 300$ kunnen kiezen, hetgeen wel 36 maal zo lang duurt. De met de tellers i en j aangeduide pixel waarbij i van $-n_1$ tot n_2 en j van $-n_2$ tot n_2 loopt, correspondeert met een punt met coördinaten (a,b) van de Mandelbrot-set waarop getoetst wordt.
Die toets bestaat uit herhaalde toepassing van het iteratieve proces (J) waarbij (a,b) als beginpunt wordt genomen. De vraag is dus of de baan van (a,b) naar oneindig gaat of niet. Wanneer een baanpunt buiten de cirkel $x^2 + y^2 = 16$ ligt weten we zeker dat de baan naar oneindig gaat, zodat we hierop toetsen. Voor een willekeurig beginpunt (a,b) bepalen we het aantal iteratiestappen k waarvoor een baanpunt voor het eerst buiten de genoemde cirkel komt. Omdat dat

aantal wel eens erg groot kan worden en voor punten binnen de mandelbrot-fractal zelfs oneindig is, hebben we het aantal iteratiestappen, enigszins willekeurig, beperkt tot 50. Op deze wijze behoort bij elke pixel een k-waarde. Bij sommige computers kan die k-waarde als definitie van een kleur worden genomen. Met een eenvoudige computer werken we gewoon modulo 2, dat wil zeggen wit voor even k en zwart voor oneven k (of omgekeerd). Heel mooie plaatjes kan men verkrijgen door een klein deel van de mandelbrot-fractal sterk te vergroten. Figuur 7.12 laat zien welke resultaten met een grote computer verkregen kunnen worden.



Julia-fractal van een sinusfunctie



Detail van de Mandelbrot-fractal

Fractals zelf maken

Het zelf vervaardigen van een fractal heeft een grote charme. Het is een soort artistieke activiteit die sterk verwant is aan het werk van een beeldend kunstenaar of een grafisch ontwerper. We wagen ons niet aan een uitspraak over kunst of computerkunst. Daarover zijn de meningen te verschillend. Toch is het verleidelijk sommige fraaie plaatjes die op het beeldscherm van de computer zichtbaar worden, als 'kunst' te betitelen. Wie in deze richting wil experimenteren doet er goed aan steeds te streven naar een maximum aan expressie met een minimum aan technische middelen. Kleuren kunnen de aantrekkelijkheid van plaatjes wel verhogen, maar bevredigende plaatjes krijgt men pas wanneer dit niet ten koste gaat van rekensnelheden en oplossend vermogen van het beeldscherm.
Dit hoofdstuk begint met een gedeelte over enkele programmeertechnische zaken die dienen als toelichting op de door ons gebruikte computerprogramma's. Die programma's, samengevat in appendix B, zijn geschreven in het bij MS-DOS 5.0 behorende QBasic, het kleine broertje van Quick-Basic. Terwille van het gebruik in andere Basic-versies hebben we ons beperkt tot de meest gangbare opdrachten, zodat de programma's desgewenst gemakkelijk in een andere Basic-versie kunnen worden gebracht, al zal dat vaak niet nodig blijken te zijn. De programma's kunnen in het algemeen zonder wijzigingen ook in Turbo-Basic, Power-Basic en Quick-Basic gebruikt worden. Het gebruik van dergelijke compiler-versies geeft vaak een behoorlijke tijdwinst.
Daarna bespreken we een paar soorten fractals waarbij er een grote verscheidenheid is aan vormen en waarvoor het programma òf erg eenvoudig is, òf erg veel mogelijkheden biedt. Het is de bedoeling dat de lezer, òf geholpen door de hier gegeven aanwijzingen, òf met eigen fantasie met deze programma's aan het werk gaat en variaties aanbrengt. De belangrijkste programmeer-principes zijn daarbij de in hoofdstuk 6 besproken Monte-Carlo-methode (het programma STOF), de in hoofdstuk 5 besproken backtrack-methode (het programma STOFB of JULIAB) en de pixelmethode (het programma JULIAP of MANDEL).

Programmeren

In dit gedeelte geven we een toelichting op de in dit boek opgenomen programma's. Wie over een computer met een MS-DOS besturings-

systeem beschikt, zal er niet al te veel problemen mee hebben.
In de programma's is gestreefd naar kortheid en duidelijkheid. Commentaar is tot een minimum beperkt, maar de lezer kan er uiteraard, na een opdracht 'rem', zijn eigen toelichting aan toevoegen. Variabelen en constanten worden in de regel alleen door een letter, eventueel gevolgd door een tweede letter of een cijfer, aangeduid. De programma's zijn ter identificatie voorzien van een naam van hoogstens acht letters of cijfers met een mnemo-technische betekenis.
Aan het begin van het programma is vermeld dat voor het beeldscherm het hoogste oplossend vermogen moet worden gekozen. Dat is hier de opdracht 'screen12', met de betekenis dat 640 × 480 adresseerbare pixels ter beschikking staan. Bij sommige computers dient deze opdracht aangepast te worden, bij voorbeeld door een ander getal achter het woord 'screen'. De volgende opdracht 'cls' (clear screen) zorgt ervoor dat we beginnen met een schoon of leeg beeldscherm. Beide opdrachten kunnen op dezelfde regel gezet worden, mits gescheiden door een dubbele punt. Dit koppelteken kan worden gebruikt om meer kleine opdrachten op een zelfde regel te plaatsen.
Het getal $\pi = 3.141593\ldots$ is in QBasic niet standaard beschikbaar en wordt daarom bij veel programma's aan het begin als pi gedefinieerd. Omdat

$$\tan(\pi/4) = 1$$

wordt π via de arctangens functie, de inverse van de tangens, bepaald door

$$\pi = 4 \arctan 1$$

Bij de plaatsbepaling op het beeldscherm beschikken we òf over zogenaamde pixelcoördinaten, òf over door de programmeur zelf gedefinieerde cartesische coördinaten. In pixelcoördinaten betekent de opdracht

pset(p,q)

dat een punt geplaatst wordt op de plaats (p,q), dat wil zeggen de p-de kolom van links naar rechts en de q-de rij van boven naar beneden. De coördinaat p is een geheel getal lopend van 0 tot 639, terwijl de coördinaat q van 0 tot 479 loopt. Pixelcoördinaten gebruiken we bij voorkeur in situaties waarbij we aan de plaatjes de hoogste kwalitatieve eisen stellen. Dat betreft bij voorbeeld het programma MANDEL.
Meestal definiëren we een aan het probleem aangepast coördinatenstelsel. Dat gaat met de opdracht:

window (x1,y1) – (x2,y2)

Deze opdracht betekent dat de rechthoekige vorm van het beeldscherm beschreven wordt door:

$$x_1 < x < x_2, y_1 < y < y_2$$

Het punt (x_1,y_1) is dus de linkerbenedenhoek en (x_2,y_2) de rechterbovenhoek. Wanneer een opdracht 'pset' voorafgegaan wordt door een opdracht 'window', worden de coördinaten (p,q) geïnterpreteerd als de daarvoor gedefinieerde cartesische coördinaten.
Om ervoor te zorgen dat wat als een vierkant wordt geprogrammeerd, ook als een vierkant verschijnt, moet in de 'window' opdracht rekening worden gehouden met de rechthoekige vorm van het beeldscherm. Meestal is die verhouding 4 : 3. Een goed voorbeeld is de opdracht:

```
window (-4,-3) - (4,3)
```

of:

```
window (-.1,-.8) - (1.1,.8)
```

In een enkel programma kan het plaatsen van een punt afhangen van de waarde van een geheel getal k, resultaat van een kleine berekening. Bij gebruik van kleuren kan k, het zogenaamde kleurenattribuut, een waarde tussen 0 en 15 hebben. De desbetreffende opdracht is

```
pset(p,q),k
```

Daarbij heeft 0 de betekenis van zwart, hetgeen bij een zwarte achtergrond neerkomt op niet plaatsen. Voor een monochrome modus komt in principe alleen $k = 0$ en $k = 1$ in aanmerking. Aanbevolen wordt om in dat geval een opdracht van de volgende vorm

```
if k = ... then set(p,q) else...
```

uit te voeren.
Met de opdracht

```
line (p1,q1) - (p2,q2)
```

wordt in Basic een recht lijntje getekend van het punt (p_1,q_1) naar het punt (p_2,q_2). De coördinaten zijn als in 'pset' òf pixelcoördinaten òf, na een 'window' opdracht, cartesische coördinaten. Als bij de 'pset' opdracht kan met ,k ook hieraan een kleurenattribuut toegevoegd worden. Het tekenen van een lijntje op het scherm is alsof een pen zich al schrijvend over het scherm beweegt. De pen blijkt dan telkens stil te staan bij wat het laatste getekend is. Wanneer de laatste positie van de pen tevens het begin is van een nieuw lijntje kan de 'line' opdracht bekort worden tot

```
line -(p,q)
```

waarbij alleen de coördinaten van het eindpunt van de nieuwe lijn vermeld behoeven te worden.

In Basic kan een cirkel met middelpunt (p,q) en straal r getekend worden met de speciale opdracht

```
circle (p,q),r
```

Men zij bij het gebruik van deze faciliteit wel bedacht op mogelijke complicaties wanneer de cirkel te klein of te groot is, en men raadplege vooral de handleiding van de beschikbare Basic-versie.

Er zijn verschillende manieren om in een programma kleine veranderingen aan te brengen. Een aantal programma's bevat een paar parameters a, b, c, ..., enzovoort, waarvoor verschillende waarden gekozen kunnen worden. Wanneer ze op een bepaalde regel gedefinieerd zijn, moet bij een andere getallenkeuze die regel worden veranderd. Met de 'editing' faciliteit van MS-DOS gaat dat heel eenvoudig. Een andere mogelijkheid is het invoeren van getallenwaarden via het toetsenbord. Daartoe bevat het programma een 'input' opdracht.

Stofwolken

Een dankbaar object voor zelfwerkzaamheid zijn de uit punten opgebouwde fractalstructuren. De programma's zijn uiterst eenvoudig en de variaties zijn onbeperkt. Voorbeelden daarvan zijn de in vorige hoofdstukken behandelde programma's van het type MIRA en STOF.
Het programma MIRA geeft geen enkel probleem en kan gemakkelijk gevarieerd worden. Bij het programma STOF hebben we te maken met een boomstructuur. Daarbij geeft de Monte-Carlo-methode de minste programmeer-technische problemen, terwijl resultaten in de vorm van plaatjes snel verkregen kunnen worden. Beter en systematischer gaat het met de backtrack-methode die in hoofdstuk 5 is behandeld.
Uitgangspunt van het eerste programmatype is een wiskundig voorschrift waarmee uit elk punt P een volgend punt $F(P)$ kan worden afgeleid. De meetkundige betekenis hiervan is een iteratieve afbeelding of een herhaalde transformatie. Een willekeurig beginpunt P_0 geeft dan aanleiding tot een puntenrij P_0, P_1, P_2, P_3, ... de baan van P_0. In het algemeen kunnen uit een of meer banen van welgekozen beginpunten fraaie plaatjes worden gevormd.

MIRA en mogelijke variaties We concentreren nu al onze aandacht op het programma MIRA en mogelijke variaties. Zoals besproken in hoofdstuk 7, berust alles op een iteratieve rij x_0, x_1, x_2, x_3, ... waarbij voor alle waarden van n voldaan is aan:

$$x_{n+1} = (1+b)F(x_n) - bx_{n-1}$$

met:

$F(x) = ax + (1-a)\{2x^2/(1+x^2)\}$

Uit deze rij kunnen we de volgende iteratieve afbeelding afleiden:

$$(A) \quad \begin{cases} x_{n+1} = by_n + F(x_n) \\ y_{n+1} = x_n + F(x_{n+1}) \end{cases}$$

In het programma wordt dit op efficiënte wijze verwerkt als een sequentie van vier opdrachten:

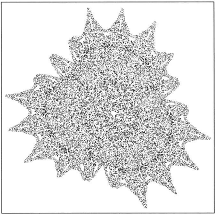
z=x : x=by+w : w=F(x) : y=w–z

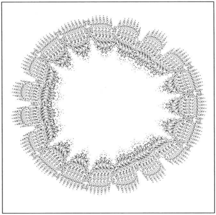
Onze standaardkeuze is:

$$(B) \qquad F(x) = ax + (1-a)\{2x^2/(1+x^2)\}$$

We beschikken nu over twee vrij te kiezen parameters. De interessantste plaatjes krijgen we door $-1 < a < 1$ te kiezen en $b = 1$ of iets kleiner, bij voorbeeld $b = 0.99$, te nemen. Elke keuze van a en b geeft de mogelijkheid van een interessant plaatje.
We beperken ons eerst tot $b = 1$. De iteratieve afbeelding is dan oppervlaktebehoudend en het is bekend dat we daarbij verschillende typen banen kunnen krijgen: periodieke cycli, gesloten krommen, eilandstructuren en ten slotte chaos.
Het is aantrekkelijk om een plaatje samen te stellen uit een aantal soorten banen. Bij de keuze kan men zich door artistieke overwegingen laten leiden. Een heel terrein van computerkunst ligt hier nog braak!
In onderstaande tabel is een aantal mogelijkheden aangegeven. In enkele gevallen kan al met de keuze van een enkele chaotische baan iets moois, een zogenaamde esthetische chaos, worden verkregen.

Esthetische chaos bij MIRA





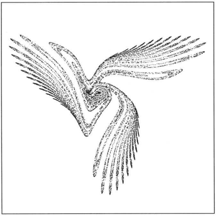
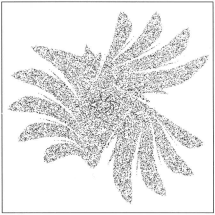
Wanneer a dicht bij de waarde 1 ligt, zijn de banen in het algemeen vrij regelmatig, maar naarmate a meer van 1 verschilt nemen onregelmatigheid en chaotisch gedrag toe. Wanneer b iets kleiner dan 1 wordt genomen, wil dit meetkundig zeggen dat bij de achtereenvolgende iteraties oppervlakten telkens verkleind worden en wel met een factor b. Dit maakt dat banen de neiging hebben naar binnen te spiraliseren en naar een soort limietstructuur te convergeren die weer een esthetische vorm kan hebben.
Meestal is het voldoende om een enkele baan met een welgekozen beginpunt te genereren. Eigenlijk doet in dit geval de keuze er niet zoveel toe, omdat alle banen ten slotte dezelfde limietstructuur hebben. In het programma kan men daartoe beginnen met een willekeurig punt en dan de eerste paar honderd punten van de te tekenen baan overslaan. Het aantal te tekenen punten hangt af van de snelheid van de computer en het oplossend vermogen van het beeldscherm. Normaal is enige duizenden punten per baan.

Programma MIRA met $b = 1$

a	window	beginpunten
–0.4	(–24,–18) – (24,18)	4,0
–0.4	(–40,–32) – (40,32)	20,0
–0.2	(–24,–18) – (24,18)	10,0
0.3	(–6,–4.5) – (6,4.5)	2,0
0.31	(–60,–45) – (60,45)	12,0
0.32	(–20,–15) – (20,15)	–5,0
0.30	(–40,–30) – (40,30)	7,0 –12,0 –21,0
–0.05	(–40,–30) – (40,30)	2,0 7.5,0 9.8,0 15,0 18,0 20,0 25,0
0.18	(–32,–24) – (32,24)	5.3,0 8,0 9,0 15,0 20,0

Programma MIRA met $b < 1$

a	b	window	beginpunt
–0.48	0.93	(–16,–14) – (16,10)	4,0
–0.4	0.99	(–16,–12) – (16,12)	4,0
–0.25	0.998	(–16,–12) – (16,12)	3,0
0.01	0.96	(–16,–12) – (16,12)	3,0
0.1	0.99	(–12,–9) – (12,9)	3,0
0.7	0.9998	(–20,–15) – (20,15)	0,12

Vedervormige chaos bij MIRA

In het model (A) kan men voor $F(x)$ allerlei functies kiezen. Wie zelf eens iets wil proberen moet als vuistregel hanteren dat $F(x)$ voor grote waarden van x niet sneller mag toenemen dan een lineaire functie. Hieraan voldoen bij voorbeeld de volgende functies:

$F(x) = ax + c \sin x$
$F(x) = ax + c \cos x$
$F(x) = a + c \sin x$
$F(x) = ax + cx^2/(1+ |x|)$

Ook functies met een meervoudig functievoorschrift zijn mogelijk als:

$F(x) = ax$	voor $|x| < 1$
$F(x) = ax + c(x-1)$	voor $x > 1$
$F(x) = ax + c(x+1)$	voor $x < -1$

De grafiek van $F(x)$ is in het laatste geval samengesteld uit rechte lijnen als een (uitgerekte) letter Z. Bij deze keuze kunnen we nog wel wat voorspellen over het te verwachten plaatje. Wanneer $|a+c| < 1$ is, gedraagt de iteratieve afbeelding zich globaal als een herhaalde rotatie over de hoek α waarvoor $\cos \alpha = a + c$. Voor $a + c = 1/2$ is bij voorbeeld $\alpha = \pi/3$, een zestallige rotatie.
In het algemeen zijn er voor $b = 1$ periodieke banen, eilandstructuren en chaos. Van de vele mogelijke combinaties met $b = 1$ vermelden we:

1 $a = 2$, $c = -2$, $\alpha = \pi/2$ met een chaotische baan gegenereerd door $x = 0.1$, $y = 0$. Men moet hiervan dan wel zo'n 50 000 punten nemen.
2 $a = 3.5$, $c = -3$, $\alpha = \pi/3$ met een chaotische baan vanuit $x = 0.1$, $y = 0$.

3 $a = 0.9$, $c = -1.4$, $\alpha = 2\pi/3$ met gewone banen vanuit (4.8,0) en (12,0) en chaotische banen vanuit (2,0) en (11,0).

Een aantal van de bovenvermelde mogelijkheden is verwerkt in de programma's WOLK, WOLK1 en WOLK2.

STOF-programma's Het programma voor fractals met een boomstructuur, zoals STOF en STOFB, is al net zo flexibel als het zojuist besproken programma MIRA. Beperken we ons tot een binaire boomstructuur, dan zijn er nu twee transformaties **L** en **R** waarmee uit een gegeven punt twee nieuwe punten kunnen worden afgeleid. Een beginpunt heeft aldus een zich telkens verdubbelend aantal opvolgers: 1, 2, 4, 8, 16, ... zodat we eerder van een stofwolk dan van een baan kunnen spreken. De echte fractal is de limietverzameling van al die punten. Behoort het beginpunt tot de fractal, en dat is zo wanneer het een dekpunt van **L** of **R** is, dan behoren alle opvolgers er ook toe. Gaan we in de praktijk tot aan de orde 10, dan hebben we al 1 + 2 + 4 + 8 + ... + 1024 = 2047 punten, meestal genoeg voor een goede benadering gegeven het oplossend vermogen van het beeldscherm. Om al die punten te kunnen berekenen is de backtrack-methode het meest doelmatig.
In het programma STOFB is het een en ander uitgewerkt. De gevolgde methode is besproken in hoofdstuk 5. In het programma STOFB zijn **L** en **R** beide contraherende rotaties:

$$\text{(C) } \mathbf{L} \begin{cases} x_{n+1} = ax_n - by_n \\ y_{n+1} = bx_n + ay_n \end{cases}$$

en

$$\text{(D) } \mathbf{R} \begin{cases} x_{n+1} = cx_n - dy_n + 1 - c \\ y_{n+1} = dx_n + cy_n - d \end{cases}$$

L is een draaivermenigvuldiging met de oorsprong als centrum en $\sqrt{(a^2 + b^2)}$ als reductiefactor. **R** is een draaivermenigvuldiging om het punt (1,0) met de reductiefactor $\sqrt{(c^2 + d^2)}$.
In de praktijk is de Monte-Carlo-versie, STOF, heel effectief. Daarbij wordt in elke iteratiestap een toevallige keuze gemaakt tussen **L** of **R**. Het programma is ongeveer van dezelfde vorm als het programma MIRA. De kern is bij voorbeeld:

```
for k=1 to 10000
if rnd < .5 then gosub L else gosub R
pset (x,y)
next k
```

Bij deze methode kan men ook eventueel in de fractal aanwezige symmetrieën uitbuiten door met elk af te beelden punt tegelijk andere symmetrische punten af te beelden, een truc waarmee een belangrijke tijdwinst behaald kan worden.
De poort naar variaties en generalisaties staat nu wijd open. Voor de constanten a, b, c, d van **L** en **R** kunnen allerlei getallen worden

geprobeerd, mits maar $a^2 + b^2 \leq 1$ en $c^2 + d^2 \leq 1$. In hoofdstuk 5 hebben we laten zien dat **L** en **R** ook zogenaamde krimpspiegelingen kunnen zijn. Nog algemener kunnen **L** en **R** willekeurige contraherende transformaties zijn. Het is handig er daarbij voor te zorgen dat de oorsprong altijd een dekpunt van **L** en (1,0) een dekpunt van **R** is. Voor **L** zou men bij voorbeeld een algemene lineaire transformatie:

$$\text{(E)} \begin{cases} x_{n+1} = a_1 x_n + a_2 y_n \\ y_{n+1} = a_3 x_n + a_4 y_n \end{cases}$$

kunnen nemen. De grootheid $a_1 a_4 - a_2 a_3$ geeft de verandering van oppervlakte aan. Door de transformatie (E) wordt een vierkant vervormd tot een parallellogram. Contractie vereist $|a_1 a_4 - a_2 a_3| < 1$. Het teken van $a_1 a_4 - a_2 a_3$ geeft aan of de vervorming al of niet met een spiegeling gepaard gaat.
Voor een wiskundige zijn dit vertrouwde zaken. Voor wie de wiskundige betekenis van deze mededelingen verborgen blijft, zijn computerexperimenten het aangewezen middel om met de eigenschappen van de lineaire transformatie enigszins vertrouwd te raken. Voor **R** zou men ook zo iets kunnen nemen. In het programma is een aantal mogelijkheden samengevat. Hieronder geven we een enkel voorbeeld van een mooi plaatje.

1 **L** en **R** beide rotaties als (C) en (D). Kies bij voorbeeld:

a	b	c	d
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}\sqrt{3}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}\sqrt{3}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}\sqrt{3}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}\sqrt{3}$
$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}\sqrt{3}$	0	$\sqrt{2}$

Men probere zelf andere waarden en men vervange bij voorbeeld **R** door een spiegeling.
We brengen daarbij nog even in herinnering dat voor een rotatie **L** met rotatiehoek ϕ en reductiefactor r de parameters a en b gegeven zijn door $a = r \cos \phi$, $b = r \sin \phi$.

2 Voor **R** kunnen we een kwadratische transformatie nemen als:

$$x' = (x^2 - y^2 + 1)/2 \quad , \quad y' = xy$$

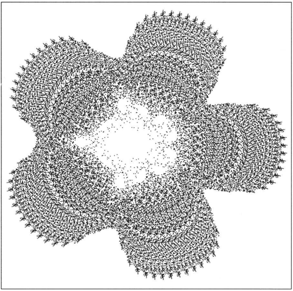
Gecombineerd met voor **L** de krimpspiegeling:

$$x' = \frac{1}{2}x + y \quad , \quad y' = -x - \frac{1}{2}y$$

geeft dit een interessant resultaat. Kiezen we **L** als:

$$x' = \frac{1}{2}y \quad , \quad y' = x + y$$

dan is succes eveneens verzekerd.

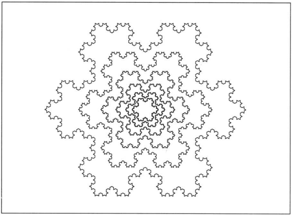


Bloemvormige chaos bij MIRA

Kronkellijnen

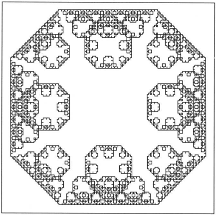
Uit kronkellijnen bestaande fractals lenen zich ook heel goed voor computerexperimenten. In zo'n experiment maken we van zo'n fractal een benadering in de vorm van een aaneenschakeling van lijnstukjes. Voorbeelden van dergelijke fractals zijn die van Von Koch (figuur 3.1) en Minkowski (figuur 3.9).
Zoals we in hoofdstuk 3 hebben gezien, berust de constructie van die fractals op een talstelsel. De basis van het talstelsel noemen we v en de orde van de beoogde benadering duiden we aan met p. Het aantal lijnstukjes kan dan v^p of een daarmee evenredig getal zijn. Voor de nummering van de lijnstukjes gebruiken we de index n. In de regel zijn zowel de lengte als de richting van het n-de lijnstuk bepaald door de ontwikkeling van n in het v-tallig talstelsel.
Bij de fractals van bij voorbeeld Von Koch, Minkowski en Lévy (figuur 3.19) hebben alle lijnstukjes dezelfde lengte en hangt alleen de richting van n af. Bij de fractals van het type KRONKEL kunnen zowel de lengte als de richting van het n-de lijnstuk van het rang-

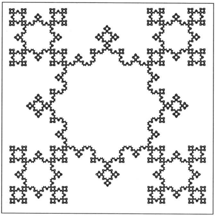
Fractal gevormd uit een reeks Koch-eilanden



nummer n afhangen. Bij de fractals van het type STER volgt de richting een eenvoudige regel. Elk lijnstuk is ten opzichte van het vorige lijnstuk over een constante hoek verdraaid. Deze fractals lenen zich heel goed voor experimenten. Daarom geven we hier nog een aanvulling op wat aan het einde van hoofdstuk 4 erover is gezegd.

Aanvulling We herhalen nog even de algemene constructie. Het rangnummer n loopt van 0 tot $(v+1)v^{p-1} - 1$. De constante rotatiehoek noemen we α, zodat het n-de lijnstukje de richting $n\alpha$ heeft. De lengte is bepaald door het aantal factoren v in p. Is dat aantal $p-1$ of p, dan is de lengte het grootst, zeg 1. Is dat aantal $p-1-k$, waarbij $k = 0, 1, \ldots, p-1$, dan is de lengte r^k waarbij r een van tevoren gekozen reductiefactor, een getal tussen 0 en 1, is.
In beginsel leidt elke keuze van p, v, α en r tot een kronkellijn. Wil de kronkellijn zich echter sluiten om aldus een, wellicht fraaie, symmetrische figuur te vormen, dan moet α zó worden gekozen dat $(v+1)\alpha$ een veelvoud van 2π is. De sterfractal van figuur 4.26 correspondeert met de keuze $p = 5$, $v = 4$, $\alpha = 4\pi/5$, $r = 0.35$.
Wie zelf wat wil proberen, kan het beste beginnen met v en α te kiezen. De orde p neemt men aanvankelijk laag, bij voorbeeld 2 of 3. De reductiefactor r zou men proefondervindelijk kunnen bepalen, afhankelijk van de esthetische kwaliteiten van de verkregen voorstelling. Als laatste stap zou men p zó hoog kunnen nemen als rekensnelheid en oplossend vermogen toelaten.
In onderstaande tabel zijn een paar mogelijkheden verzameld. Omdat het in de verschillende gevallen moeilijk te voorspellen is hoe groot de totale figuur wordt, moeten beeldschermcoördinaten proefondervindelijk met een 'window' opdracht worden aangebracht.





Links: borduurpatroon van twee Levy-fractals
Rechts: resultaat van een experiment met een kronkelprogramma

v	α	r	p
2	$2\pi/3$	0.62	9
3	$\pi/2$	0.47	6
4	$2\pi/5$	0.5	3
4	$4\pi/5$	0.35	4
5	$\pi/3$	0.33	5
6	$2\pi/7$	0.383	4
6	$6\pi/7$	0.32	4
7	$\pi/4$	0.5	4
8	$2\pi/9$	0.25	4
11	$\pi/6$	0.5	3
14	$14\pi/15$	0.3	3
15	$\pi/8$	0.27	3
19	$\pi/10$	0.5	2

Herhaald motief In hoofdstuk 3 hebben we veel aandacht besteed aan een familie van fractals waarvan de ontstaanswijze berust op de herhaling van een eenvoudig motief. We beginnen met een basislijn of beginlijn, bij voorbeeld een vierkant. In elke ronde wordt dan elk lijnstukje vervangen door het motief, zoals onder andere in figuur 3.1. Het desbetreffende programma KRONKEL geeft al veel mogelijkheden tot variatie, zoals ook al blijkt uit de figuren 3.13-3.20. Dat programma zit wiskundig wel goed in elkaar, maar heeft het praktische bezwaar dat voor de opslag van de numerieke gegevens veel computergeheugen nodig is, en dat kan voor sommige computers problemen geven. We hebben daarom twee andere programma's (KRONKELT en KRONKELB) opgenomen waarvoor dit bezwaar niet geldt. In het eerste programma, KRONKELT, volgen we de zogenaamde talstelselmethode. Net als in hoofdstuk 3 nemen we aan dat het motief uit v vectoren bestaat en dat we met een gekozen orde p uitgaande van een beginlijnstuk v^p lijnstukjes moeten tekenen. We

nummeren ze van 0 tot $v^p - 1$ en we bepalen van het willekeurige rangnummer n de ontwikkeling in het v-tallig talstelsel $n = t_{p-1}t_{p-2} \dots t_1t_0$, dat wil zeggen:

$$n = t_0 + vt_1 + v_2t_2 + \dots + v^{p-1}t_{p-1}$$

De v vectoren van het motief moeten in dit programma worden vastgelegd door van elke vector telkens lengte en richting (in graden bij voorbeeld) te vermelden. Wanneer we ons, zoals in het vermelde programma, beperken tot het motief van de fractal van Von Koch, dan zijn die data:

$$\frac{1}{3}, 0, \quad \frac{1}{3}, 60, \quad \frac{1}{3}, -60, \quad \frac{1}{3}, 0$$

of $l(0)$, $\phi(0)$, $l(1)$, $\phi(1)$, ..., $l(v-1)$, $\phi(v-1)$ in algemene notatie. Lengte l en richting ϕ van het n-de vectortje zijn dan gegeven door:

$$l = l(t_0)l(t_1)l(t2) \dots l(t_{p-1}),$$
$$\phi = \phi(t_0) + \phi(t_1) + \phi(t_2) + \dots + \phi(t_{p-1})$$

Daarmee is de kern van het programma gegeven. De rest is voorbereidende administratie en franje.
De gegevens van de beginlijn worden eveneens vectorsgewijs ingevoerd. Dus van elk lijnstuk dat deel uitmaakt van de beginlijn, worden lengte en richting (in graden) vermeld. Voor een vierkant bij voorbeeld wordt dat:

2, 0, 2, 90, 2, 180, 2, –90

In het programma moeten de graden omgerekend worden in radialen volgens 180 = π radialen. Bovendien moet er ook in worden aangegeven waar de kronkellijn begint. Is dat bij voorbeeld in het punt (–1,–1), dan is de beginlijn een vierkant met hoekpunten (–1,–1), (1,–1), (1,1), (–1,1).
Om de experimenteerder te helpen, hoeven van het model de lengten van de samenstellende vectoren niet in absolute grootte, maar in relatieve grootte vermeld te worden. In het geval van het motief van Von Koch kunnen we dus volstaan met de datarij:

1, 0, 1, 60, 1, –60, 1, 0

In het programma kan men aflezen hoe deze relatieve lengten weer tot absolute lengten worden herleid.
In hoofdstuk 3 hebben we bij de bespreking van de kronkelfractals al laten zien hoe men kan experimenteren. Het allerbelangrijkste met betrekking tot het programma KRONKELT vatten we nog even samen.

Beginlijn	Data	Beginpunt
lijnstuk	2,0	(–1,0)
dubbel lijnstuk	2,0,2,180	(–1,0)
gelijkzijdige driehoek	3,300,3,180,3,60	$(0,\sqrt{3})$
gelijkzijdige driehoek	3,240,3,0,3,120	$(0,\sqrt{3})$
vierkant	2,0,2,90,2,180,2,–90	(–1,–1)
vierkant	2,90,2,0,2,–90,2,180	(–1,–1)

Modeltype	v	Data
Lévy	2	1,45,1,–45
Minkowski	3	1,45,2,–45,1,45
Von Koch	4	1,0,1,60,1,–60,1,0
koch-vierkant	5	1,0,1,90,1,0,1,–90,1,0

Het is heel gemakkelijk zelf variaties aan te brengen met de kans op onverwachte en soms fraaie resultaten. Het volgende voorbeeld laat zien wat we bij voorbeeld kunnen doen. Als beginlijn kiezen we een vierkant met de zijden naar binnen gericht. Motief en variaties voor $v = 6$ als hieronder:

1, 0, 1, 90, 1, –45, 1, 45, 1, –90, 1, 0
1, 0, 1, 90, 2, –45, 2, 45, 1, –90, 1, 0
1, 0, 1, 90, 1, –60, 1, 60, 1, –90, 1, 0
1, 0, 1, 90, 2, 45, 2, -45, 1, –90, 1, 0

Zoals gezegd is het oorspronkelijke programma KRONKEL uit hoofdstuk 3 het snelst. Het hier besproken programma is wat langzamer, onder andere omdat voor elk rangnummer eerst de ontbinding in het v-tallig talstelsel moet worden bepaald. Van dit programma hebben we een tweede versie opgenomen waarin de backtrack-methode is toegepast. Dit programma, genaamd KRONKELB, is even flexibel als het voorafgaande, maar wel aanmerkelijk sneller.

Complexe getallen

Voor de lezer die enigszins op de hoogte is van de theorie van de complexe getallen of er althans al eens eerder mee heeft kennisgemaakt, zijn in deze appendix de hoofdzaken van die theorie kort samengevat. Daarna laten we zien hoe nuttig complexe getallen zijn voor de beschrijving en de analyse van sommige fractals, in het bijzonder die van Julia en Mandelbrot.
Kort samengevat kan worden gezegd dat het rekenen met complexe getallen overeenkomt met meetkundige bewerkingen in het platte vlak. Zo is bij voorbeeld een complexe vermenigvuldiging hetzelfde als een rotatie gecombineerd met een schaling!

Samenvatting Het rekenen met complexe getallen is bepaald door de zogenaamde imaginaire eenheid i (soms als j geschreven), met de rekenregel:

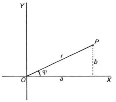
$$i^2 = -1$$

Een complex getal ziet er uit als $a + ib$ of $a + bi$, waarbij a en b reële getallen zijn. Het getal a heet het reële deel en het getal b het imaginaire deel. De notatie is:

$$c = a + bi\ ,\ a = \mathrm{Re}\ c\ ,\ b = \mathrm{Im}\ c$$

Het complexe getal $a + bi$ denken we in het platte vlak afgebeeld of geïdentificeerd met het punt $P(a,b)$ in cartesische coördinaten (figuur A.1). De X-as noemen we ook wel de reële as, omdat die de drager is van alle reële getallen. Bijgevolg heet de Y-as ook wel de imaginaire as.
De poolcoördinaten r en ϕ van $P(a,b)$ worden aangeduid als respectievelijk de absolute waarde en het argument van het complexe getal $c = a + bi$. Dus:

FiguurA.1 Afbeelding van een complex getal in het platte vlak.



$$r = |\ c\ | = \sqrt{(a^2 + b^2)}$$

en

$$\phi = \arg c = \arctan\ (b/a)\ (\pm\ \pi)$$

Men lette erop dat het argument ϕ van c geteld wordt van $-\pi$ tot $+\pi$. Zonder beperking geldt $\tan\ \phi\ =\ b/a$, maar omgekeerd is

$\phi = \arctan (b/a)$ slechts juist voor $a > 0$. Omdat $a = r \cos \phi$ en $b = r \sin \phi$ kan het complexe getal $c = a + bi$ ook worden geschreven als:

(1) $a + bi = r(\cos \phi + i \sin \phi)$

De getallen $a + bi$ en $a - bi$ heten complex toegevoegd. De corresponderende beeldpunten liggen gespiegeld ten opzichte van de reële as. In verkorte notatie duiden we de complex toegevoegde van c aan met $\bar{c}$.
Met complexe getallen kunnen we gewone algebraïsche bewerkingen uitvoeren mits we maar bedenken dat $i^2 = -1$. Zo is bij voorbeeld:

$$(a + bi)(a - bi) = a + b^2$$

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

$$(a + bi)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$$

Een complex getal c waarvoor $| \, c \, | = 1$ wordt afgebeeld als een punt op de eenheidscirkel. Voor het produkt van twee dergelijke getallen geldt de mooie regel:

(2) $(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$

die met bekende goniometrische formules kan worden afgeleid. Vermenigvuldigen komt dus neer op het optellen van de argumenten! Iets algemener geldt voor het produkt van twee complexe getallen c_1 en c_2 de regel:

(3) $\begin{cases} | \, c_1 c_2 \, | = | \, c_1 \, | \cdot | \, c_2 \, | \\ \arg c_1 c_2 = \arg c_1 + \arg c_2 \end{cases}$

Overeenkomst met transformaties De bewerkingen met complexe getallen corresponderen met meetkundige transformaties. Een transformatie van een complex getal schrijven we als:

(4) $z' = F(z)$

waarbij $z = x + yi$ en $z' = x' + y'i$ in onbepaalde cartesische coördinaten. Hoe dit in een aantal eenvoudige gevallen correspondeert met een meetkundige transformatie, laten we hieronder zien:

1 $z' = z + c$, een translatie of parallelverschuiving. In reële notatie is dit hetzelfde als $x' = x + a$, $y' = y + b$.
2 $z' = iz$, een rotatie over $\pi/2$ of een kwartdraai. In reële notatie: $x' = -y$, $y' = x$.
3 $z' = (\cos \alpha + i \sin \alpha)z$, een rotatie over de hoek α. In reële

notatie: $x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha$, $y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha$.

4 $z' = az$, waarbij a reëel is, een *centrale vermenigvuldiging* of schaling met een factor a.

5 $z' = \bar{z}$, spiegeling om de reële as.

6 $z' = (\cos \alpha + i \sin \alpha)\bar{z}$, een spiegeling om de as met richting $\alpha/2$. In reële notatie: $x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha$, $y' = x \sin \alpha - y \cos \alpha$.

Combinatie van 3 en 5 geeft de complexe vermenigvuldiging:

$$z' = cz$$

meetkundig een rotatie met schaling, een (directe) gelijkvormigheidstransformatie waarbij de oorsprong het centrum of dekpunt is. Een gelijkvormigheidstransformatie waarbij een willekeurig punt, z_0, het centrum is, wordt dan in complexe taal beschreven door:

$$z' = z_0 + c(z - z_0)$$

Toepassing op fractals Met dit materiaal kunnen we eenvoudig de structuur beschrijven van de in hoofdstuk 5 beschouwde fractals die zijn opgebouwd uit twee gelijkvormigheidstransformaties **L** en **R**. Voor de in figuur 5.21 afgebeelde fractal is de beschrijving in complexe notatie als volgt:

L $\quad z' = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} i \sqrt{3}) \bar{z}$

R $\quad z' = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \bar{z}$

Voor de fractal van figuur 5.22 geldt analoog:

L $\quad z' = cz$

R $\quad z' = c\bar{z} + (1 - c)$ met $c = \frac{3}{10}(-1 + i\sqrt{3})$

Samengestelde transformaties Met de complexe rekenwijze kunnen we ook samengestelde transformaties als $\mathbf{R}^2$, **RLR**, enzovoort, beschrijven. In het laatste voorbeeld geldt $c\bar{c} = 9/25$ en wordt $\mathbf{R}^2$ berekend als:

$$z'' = c\bar{z}' + (1 - c) = c(\bar{c}z + 1 - \bar{c}) = c\bar{c}(z-1) + c$$

of

$$z'' = \frac{9}{25}(z - 1) + c$$

Dit herkennen we als een centrale vermenigvuldiging. Het centrum vinden we door $z'' = z$ te stellen, dus $z = (-25 + 15i\sqrt{3})/32$. De combinatie $\cos\alpha + i\sin\alpha$ wordt vaak als $\exp(i\alpha)$ of $\exp(\alpha i)$ geschreven met de notatie van de exponentiële functie. Daarbij gelden de gebruikelijke regels van die functie, zoals $\exp(0) = 1$, $\exp(a + b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$. Inderdaad kan formule (2) in deze notatie geschreven worden als:

$$(\exp(i\alpha) \cdot \exp(i\beta)) = \exp(i(\alpha+\beta))$$

Een consequentie van deze notatie is de 'mysterieuze formule' $\exp(i\pi) = -1$.

Fractal van Julia De complexe rekenwijze is vooral van belang bij de wiskundige beschrijving van de fractals van Julia. Zo'n fractal is bepaald door de transformatie (4) eindeloos te herhalen. Van belang is wel dat de functie $F(z)$ gedifferentieerd kan worden, maar voor eenvoudige functies als een veelterm, sinus, cosinus, enzovoort, gaat dit net als bij gewone functies van reële getallen. Zo is de afgeleide of het differentiaal-quotiënt van de functie $F(z) = z^m$ gelijk aan $F'(z) = mz^{m-1}$. Net als bij reële functies kan van een complexe functie $F(z)$ voor een klein gebiedje van z-waarden een lineaire benadering worden gemaakt. Beperken we ons tot waarden vlak bij z_0, dan geldt de benadering:

$$(5) \quad F(z) \approx F(z_0) + (z - z_0)F'(z_0)$$

Dat is een belangrijke constatering, want dit betekent dat de afbeelding $z' = F(z)$ voor $z \approx z_0$ gelijkwaardig is met een combinatie van een translatie, een rotatie en een centrale vermenigvuldiging (tenzij $F'(z_0) = 0$). Dat is dus een gelijkvormigheidstransformatie met schaalfactor $|F'(z_0)|$. De transformatie $z' = F(z)$ kunnen we ons dus voorstellen als samengesteld uit gelijkvormigheidstransformaties met een van punt tot punt veranderende schaalfactor. Omdat bij een gelijkvormigheidstransformatie hoeken niet veranderen geldt datzelfde voor de transformatie $z' = F(z)$. In hoofdstuk 7 hebben we die transformaties conforme afbeeldingen genoemd en daar voorbeelden van gegeven. Het belangrijkste voorbeeld was daar:

$$\begin{cases} x' = x^2 - y^2 + a \\ y' = 2xy + b \end{cases}$$

een op het eerste gezicht nogal gekunstelde combinatie. Maar in complexe notatie wordt pas duidelijk hoe logisch en hoe eenvoudig het in werkelijkheid is:

$$(6) \quad z' = z^2 + c$$

Substitutie van $z = x + yi$ en $c = a + bi$ en uitsplitsen van (6) in reëel en imaginair deel leidt meteen tot het gewenste resultaat.
Van bijzonder belang zijn de dekpunten of evenwichten en de periodieke punten van $z' = F(z)$. Is z een dekpunt, dan volgt uit de lineaire benadering (5) in de omgeving van het dekpunt dat de stabiliteit bepaald wordt door de schaalfactor $|F'(z)|$. Beschouwen we dus het iteratieve proces:

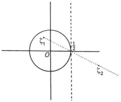
(7) $z_{n+1} = F(z_n)$

en geldt voor het evenwicht z dat $|F'(z)| < 1$, dan gaat de baan van een punt z_0 in de buurt van z naar het evenwicht toe, wordt er als het ware door aangetrokken. Het evenwicht is dan stabiel of aantrekkend. Is daarentegen $|F'(z)| > 1$, dan wordt de baan van z_0 afgestoten. Het evenwicht is dan instabiel of afstotend. Is ten slotte $|F'(z)| = 1$, dan kan geen uitspraak worden gedaan. Het evenwicht heet dan neutraal.
Op overeenkomstige wijze kan ook voor een periodieke cyclus stabiliteit worden onderzocht. De afbeelding (6) heeft twee dekpunten of evenwichten. Ze zijn te berekenen door $z' = z$ te stellen en de vierkantsvergelijking:

$$z^2 - z + c = 0$$

op te lossen. Noemen we de wortels van deze vergelijking ζ_1 en ζ_2, dan is $\zeta_1 + \zeta_2 = 1$. Meetkundig wil dit zeggen dat het midden van de punten ζ_1 en ζ_2 het beeldpunt van 1/2 is (figuur A.2). Uit (7) met $F(z) = z^2 + c$ en $F'(z) = 2z$ volgt dat de stabiliteit van de evenwichten afhangt van $|2z|$. Uit figuur A.2 lezen we af dat voor een van de twee evenwichten, zeg ζ_2, altijd $|\zeta_2| > 1/2$ geldt, zodat dit evenwicht instabiel is. Het andere evenwicht ζ_1 kan stabiel of instabiel zijn. Een kleine berekening geeft $\zeta_1 = 1/2 - \sqrt{(1/4 - c)}$. De stabiliteitsvoorwaarde $|\zeta_1| < 1/2$ betekent meetkundig dat ζ_1 binnen een cirkel om de oorsprong O met straal 1/2 ligt.
De berekening van de 2-cyclus van (6) levert ook weinig problemen op. Voert de afbeelding (6) z in w over en w weer in z, dan geldt:

FiguurA.2 Posities van de evenwichten bij de kwadratische afbeelding.



$$w = z^2 + c \quad , \quad z = w^2 + c$$

Een eenvoudige berekening laat zien dat hieruit volgt dat w en z voldoen aan:

$$w + z = -1 \quad , \quad wz = c + 1$$

Afgeleid kan worden dat de stabiliteitsvoorwaarde voor de 2-cyclus $|wz| < 1/4$ is. Dat betekent dus $|c + 1| < 1/4$, of meetkundig dat c binnen de cirkel om -1 met straal 1/4 ligt. Dit resultaat zal van belang blijken te zijn voor de analyse van de fractal van Mandelbrot.

Fractal van Mandelbrot In hoofdstuk 7 hebben we iets over de fractal van Mandelbrot gezegd zonder van complexe getallen gebruik te maken. Met complexe getallen gaat het allemaal veel logischer en gemakkelijker. We herinneren er nog even aan dat de mandelbrot-verzameling van $z' = z^2 + c$ wordt gevormd door de beeldpunten van de c-waarden waarvoor de baan van $z = 0$, dat wil zeggen:

$$0 \quad , \quad c \quad , \quad c^2 + c \quad , \quad (c^2 + c)^2 + c \quad , \ldots$$

begrensd blijft. We hebben ook gezien dat de verzameling van Mandelbrot als meest opvallende kenmerk een niervormig gebied bevat met daaraan een cirkel gehecht. De verklaring daarvan is betrekkelijk eenvoudig. Wanneer er een stabiel dekpunt is, dan gaat de baan van $z = 0$ daarnaar toe. Dat gebeurt voor $|2\zeta_1| < 1$ waarbij $\zeta_1 = 1/2 - \sqrt{(1/4 - c)}$, zoals we hierboven hebben gezien. Op de rand van het stabiliteitsgebied geldt $|2\zeta_1| = 1$, zodat we $2\zeta_1 = \cos\theta + i \sin\theta$ kunnen stellen. Substitutie in $2\zeta_1 = 1 - \sqrt{(1 - 4c)}$ geeft na omrekening:

$$\text{Re}\, c = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos\theta\, (1 - \cos\theta)$$

$$\text{Im}\, c = \frac{1}{2} \sin\theta\, (1 - \sin\theta)$$

Laten we θ lopen van 0 tot 2π, dan blijkt de hierdoor gedefinieerde kromme precies de cardiopide te zijn die het niervormige gebied begrenst. Het naburige cirkelvormige gebied correspondeert met een stabiele 2-cyclus. Hierboven hebben we afgeleid dat de 2-cyclus stabiel is voor c-waarden die voldoen aan $|c + 1| < 1/4$. Voor die waarden is de baan van $z = 0$ begrensd, zodat we weer een gedeelte van de verzameling van Mandelbrot krijgen. Dat is hier de cirkelschijf $|c + 1| < 1/4$ om $c = -1$ met straal $1/4$.

Programma's

Hoofdstuk 1
BOOMH1 H-fractal
BOOMH2 H-fractal backtrack-methode
BOOM2 tweetallige boom
BOOM3 drietallige boom
SIER zeef van Sierpinski

Hoofdstuk 2
KAM kam van Cantor

Hoofdstuk 3
KOCH koch-kromme
MINK worst van Minkowski
KRONKEL eiland met kronkelkust
LEVY kromme van Lévy
DRAAK draakkromme met willekeurige hoek
DRAAKO draakkromme tussen twee punten
DRAAKI draakkromme met afgeronde hoeken

Hoofdstuk 4
WIKKEL cirkelevolvente
ARCHI spiraal van Archimedes
LOGSPIRA logaritmische spiraal
BOLSPIRA bolspiraal
WERVEL draaiend en krimpend vierkant
PYTHB1 boom van Pythagoras, talstelsel-methode
PYTHB2 scheve boom van Pythagoras, backtrack-methode
PYTHB3 alternerende boom van Pythagoras, backtrack-methode
PYTHT takkenboom van Pythagoras, backtrack-methode
BOOMM boom van Mandelbrot, backtrack-methode
STER sterfractal

Hoofdstuk 5
STOFB stoffractal van twee rotaties, backtrack-methode
STOFBT stoffractal van drie rotaties, backtrack-methode

Hoofdstuk 6
MONDRIAN patroon van toevallige horizontale en verticale streepjes
STOF stoffractal van twee rotaties of spiegelingen, Monte-Carlo-methode
PYTHBS boom van Pythagoras met toevallige storingen, backtrack-methode
BROWNL brownse lijn
COLLET bifurcatie-diagram van $x \rightarrow ax(1-x)$

Hoofdstuk 7
HENON banen van Hénons kwadratisch systeem
MIRA banen van Mira's dynamisch systeem
JULIAB julia-fractal van kwadratisch systeem, backtrack-methode
JULIAMC julia-fractal, Monte-Carlo-methode
JULIAP julia-fractal, pixelmethode
MANDEL mandelbrot-verzameling van kwadratisch systeem, pixelmethode

Hoofdstuk 8
WOLK banen van dynamisch systeem
WOLK1 banen van dynamisch systeem
WOLK2 banen van dynamisch systeem
KRONKELT kronkellijn met gegeven beginlijn en motief, talstelsel-methode
KRONKELB kronkellijn met gegeven beginlijn en motief, backtrack-methode

De programma's zijn om typografische redenen in dit boek afgedrukt met een uitgelijnde linkerkolom. Op de bijgaande apart te bestellen diskette zijn de programma's in een beter leesbare en meer gestructureerde lay-out opgenomen.

BOOMH1

```
REM ***boomfractal op letter H***
REM ***naam:BOOMH1***
REM ***deze versie is snel maar kost veel geheugenruimte***
DIM X(2048),Y(2048)
SCREEN 12 : CLS
WINDOW (-2.4,-1.8)-(2.4,1.8)
P=9 : A=1/SQR(2) 'orde en verkortingsverhouding
X(1)=0 : Y(1)=0
FOR M=0 TO P : S=M MOD 2
FOR N=2^M TO 2^(M+1)-1
IF S=1 THEN
X(2*N)=X(N) : Y(2*N)=Y(N)+A^M
X(2*N+1)=X(N) : Y(2*N+1)=Y(N)-A^M
ELSE
X(2*N)=X(N)+A^M : Y(2*N)=Y(N)
X(2*N+1)=X(N)-A^M : Y(2*N+1)=Y(N)
END IF
NEXT N
NEXT M
FOR N=1 TO 2^(P+1)-1
LINE (X(2*N),Y(2*N))-(X(2*N+1),Y(2*N+1))
NEXT N
A$=INPUT$(1)
END
```

BOOMH2

```
REM ***boomfractal op letter H, backtracking***
REM ***naam:BOOMH2***
SCREEN 12 : CLS
WINDOW (-1.2,-.9)-(1.2,.9)
P=7 : DIM X1(P),X2(P),X3(P),X4(P),Y1(P),Y2(P),Y3(P),Y4(P)
A=.5 'verkortingsverhouding
X1(0)=0 : Y1(0)=0 : S=1 : GOSUB graphics
FOR M=1 TO 4^(P-1)-1 : N=M : S=P
viertallig:
IF N MOD 4 = 0 THEN N=N\4 : S=S-1 : GOTO viertallig
IF INKEY$<>"" THEN END
GOSUB datashift : GOSUB graphics
NEXT M : A$=INPUT$(1)
END
datashift:
X1(S-1)=X2(S-1) : X2(S-1)=X3(S-1) : X3(S-1)=X4(S-1)
Y1(S-1)=Y2(S-1) : Y2(S-1)=Y3(S-1) : Y3(S-1)=Y4(S-1)
RETURN
graphics:
FOR J=S TO P
X=X1(J-1) : Y=Y1(J-1)
B=A^J : C=A*B*1.5
X1(J)=X+B : Y1(J)=Y+C
X2(J)=X+B : Y2(J)=Y-C
X3(J)=X-B : Y3(J)=Y+C
X4(J)=X-B : Y4(J)=Y-C
LINE (X-B,Y)-(X+B,Y)
LINE (X1(J),Y1(J))-(X2(J),Y2(J))
LINE (X3(J),Y3(J))-(X4(J),Y4(J))
NEXT J
RETURN
```

BOOM2

```
REM ***boomstructuur in tweetallig stelsel***
REM ***naam:BOOM2***
SCREEN 12 : CLS
WINDOW (-2,-.5)-(2,2.5)
LINE (0,0)-(0,1)
FOR K=1 TO 7
H=2^(1-K)
FOR L=1 TO 2^K
X=-2+(4*L-2)*H : Y=2-H
LINE (X-H,Y+H/2)-(X-H,Y)
LINE (X-H,Y)-(X+H,Y) : LINE -(X+H,Y+H/2)
NEXT L
NEXT K
END
```

BOOM3

```
REM ***boomstructuur in drietallig stelsel***
REM ***naam:BOOM3***
SCREEN 12 : CLS : PI=4*ATN(1)
WINDOW (-1.2,-.9)-(1.2,.9)
P=5 : DIM T(P) 'orde
A=.45 'reductiefactor
FOR M=0 TO P
FOR N=0 TO 3^M-1
REM ***bepaling drietallige notatie van n ***
N1=N
FOR L=1 TO M
T(L)=N1 MOD 3 : N1=N1\3
NEXT L
X=0 : Y=0
FOR K=1 TO M
F=(2*T(K)*PI)/3
X=X+COS(F)*A^K : Y=Y+SIN(F)*A^K
NEXT K
LINE (X,Y)-(X+A^K,Y)
```

```
LINE (X,Y)-(X-.5*A^K,Y+SQR(3)/2*A^K)
LINE (X,Y)-(X-.5*A^K,Y-SQR(3)/2*A^K)
NEXT N
NEXT M
END
```

SIER

```
REM ***de zeef van Sierpinski***
REM ***naam:SIER***
SCREEN 12 : CLS : PI=4*ATN(1)
WINDOW (-2.6,-2.4)-(2.6,1.5)
P=5 : DIM T(P) : A=SQR(3)
FOR M=0 TO P
FOR N=0 TO 3^M-1
N1=N
FOR L=0 TO M-1
T(L)=N1 MOD 3 : N1=N1\3
NEXT L
X=0 : Y=0
FOR K=0 TO M-1
X=X+COS((4*T(K)+1)*PI/6)/2^K
Y=Y+SIN((4*T(K)+1)*PI/6)/2^K
NEXT K
U1=X+A/2^(M+1) : U2=X-A/2^(M+1)
V1=Y-1/2^(M+1) : V2=Y+1/2^M
LINE (U1,V1)-(X,V2)
LINE -(U2,V1) : LINE -(U1,V1)
NEXT N
NEXT M : A$=INPUT$(1)
END
```

KAM

```
REM ***de kam van Cantor***
REM ***naam:KAM***
SCREEN 12 : CLS
WINDOW (-.3,-.4)-(1.3,.8)
DIM A(729),B(729)
A(0)=0 : A(1)=1 : B=.1
LINE (0,0)-(1,0) : LINE -(1,-B)
LINE -(0,-B) : LINE -(0,0)
FOR P=1 TO 6
FOR I=0 TO 2^P-1
B(I)=A(I)/3 : B(I+2^P)=1-(1-A(I))/3
NEXT I
FOR J=1 TO 2^(P+1)-1
A(J)=B(J)
NEXT J
FOR K=0 TO 2^(P+1)-1 STEP 2
LINE (A(K),B*P)-(A(K+1),B*P)
LINE (A(K),B*P)-(A(K),B*P-B)
LINE (A(K+1),B*P)-(A(K+1),B*P-B)
NEXT K
NEXT P
END
```

KOCH

```
REM ***kromme van von Koch***
REM ***naam:KOCH***
SCREEN 12 : CLS : PI=4*ATN(1)
WINDOW (-.1,-.4)-(1.1,.5)
P=5 : DIM T(P) 'orde
H=3^(-P) : PSET (0,0)
FOR N=0 TO 4^P-1
REM ***notatie in viertallig talstelsel***
M=N
FOR L=0 TO P-1
T(L)=M MOD 4 : M=M\4
NEXT L
REM ***bepaling richting lijnstuk n***
S=0
FOR K=0 TO P-1
S=S+(T(K)+1) MOD 3-1
NEXT K
REM ***graphics***
X=X+COS(PI*S/3)*H : Y=Y+SIN(PI*S/3)*H
LINE -(X,Y)
NEXT N : A$=INPUT$(1)
END
```

MINK

```
REM ***de lijn van Minkowski***
REM ***naam:MINK***
SCREEN 12 : CLS
WINDOW (-.3,-.7)-(1.3,.5)
DIM A(7) : A(0)=0 : A(1)=1 : A(2)=0 : A(3)=3
A(4)=3 : A(5)=0 : A(6)=1 : A(7)=0
P=3 : DIM T(P) 'orde
H=4^(-P) : X=0 : Y=0 : PSET (0,0)
FOR N=0 TO 8^P-1
M=N
FOR L=0 TO P-1
T(L)=M MOD 8 : M=INT(M/8)
NEXT L
S=0
FOR K=O TO P-1
S=S+A(T(K)) : S=S MOD 4
NEXT K
SELECT CASE S
CASE 0
X=X+H
CASE 1
Y=Y+H
CASE 2
X=X-H
CASE 3
Y=Y-H
END SELECT
LINE -(X,Y)
NEXT N : A$=INPUT$(1)
END
```

KRONKEL

```
REM ***fractal kromme met gegeven basislijn en motief***
REM ***het kruis van von Koch***
REM ***naam:KRONKEL***
SCREEN 12 : CLS : PI=4*ATN(1)
DIM X(1024),Y(1024)
WINDOW (-2.4,-1.8)-(2.4,1.8)
REM ***fractal data***
U=4 : DIM A(U),B(U) 'aantal elementen basislijn
```

```
V=4 : DIM C(V),D(V) 'aantal elementen motief
DATA 1,1,-1,1,-1,-1,1,-1,1,1 'data basislijn
DATA .333,0,.5,.2887,.667,0 'data motief
P=4 'order
FOR I=0 TO U : READ A(I),B(I) : NEXT I
FOR I=1 TO V-1 : READ C(I),D(I) : NEXT I
REM ***bepaling hoekpunten***
C(0)=0 : D(0)=0 : X(0)=0 : Y(0)=0 : X(V^P)=1 : Y(V^P)=0
FOR I=0 TO P-1
FOR J=0 TO V^P-1 STEP V^(P-I)
M1=J+V^(P-I) : X1=X(M1)-X(J) : Y1=Y(M1)-Y(J)
FOR K=1 TO V-1
M2=J+K*V^(P-I-1)
X(M2)=X1*C(K)-Y1*D(K)+X(J)
Y(M2)=Y1*C(K)+X1*D(K)+Y(J)
NEXT K
NEXT J
NEXT I
REM ***graphics***
PSET (A(0),B(0))
FOR M=0 TO U-1
A=A(M+1)-A(M) : B=B(M+1)-B(M)
FOR N=0 TO V^P
X=A*X(N)-B*Y(N)+A(M) : Y=B*X(N)+A*Y(N)+B(M)
LINE - (X,Y)
NEXT N
NEXT M : A$=INPUT$(1)
END
```

LEVY

```
REM ***kromme van Levy***
REM ***naam:LEVY***
SCREEN 12 : CLS : PI=4*ATN(1)
WINDOW (-.7,-1.3)-(1.7,.5)
P=12 : H=2^(-P/2) 'orde
A=H*COS(P*PI/4) : B=H*SIN(P*PI/4)
LINE (0,0)-(A,-B) : LINE -(A+B,A-B)
X=1 : Y=1
FOR N=2 TO 2^P-1
M=N : S=1
DO
IF M MOD 2=1 THEN S=S+1
M=M\2
LOOP WHILE M>1
SELECT CASE S MOD 4
CASE 0
X=X+1
CASE 1
Y=Y+1
CASE 2
X=X-1
CASE 3
Y=Y-1
END SELECT
LINE -(A*X+B*Y,A*Y-B*X)
NEXT N : A$=INPUT$(1)
END
```

DRAAK

```
REM ***draakkromme met gegeven hoek***
REM ***naam:DRAAK***
SCREEN 12 : CLS : PI=4*ATN(1)
WINDOW (-2.5,-2)-(1.5,1)
P=6 : H=2^(-P/2) 'orde
A=1.7453 : B=PI-A 'keuze van hoek a
X=H : Y=0 : S=0
LINE (0,0)-(H,0)
FOR N=1 TO 2^P-1
M=N
DO
IF M MOD 2 = 0 THEN M=M/2
LOOP UNTIL M MOD 2 = 1
IF M MOD 4 = 1 THEN D=1 ELSE D=-1
S=S+D
REM ***graphics***
X=X+H*COS(S*B) : Y=Y+H*SIN(S*B)
LINE -(X,Y)
NEXT N : A$=INPUT$(1)
END
```

DRAAK0

```
REM ***draakkromme***
REM ***naam:DRAAK0***
SCREEN 12 : CLS : PI=4*ATN(1)
WINDOW (-1.7,-.9)-(.7,.9)
P=12 : H=2^(-P/2) 'orde
B=PI/2 : X=H : Y=0 : S=0
LINE (0,0)-(H,0)
FOR N=1 TO 2^P-1
M=N
DO
IF M MOD 2 = 0 THEN M=M/2
LOOP UNTIL M MOD 2 = 1
IF M MOD 4 = 1 THEN D=1 ELSE D=-1
S=S+D
REM ***graphics***
X=X+H*COS(S*B) : Y=Y+H*SIN(S*B)
LINE -(X,Y)
NEXT N : A$=INPUT$(1)
END
```

DRAAK1

```
REM ***draakkromme met afgeronde hoeken***
REM ***naam:DRAAK1***
SCREEN 12 : CLS : PI=4*ATN(1)
WINDOW (-.7,-1.1)-(1.7,.7)
P=10 : H=2^(-P/2) 'orde
XA=0 : YA=H : XB=0 : YB=0 : XS=XA : YS=YA
C1=.3 : C2=1-C1 'afrondingsparameter
FOR N=1 TO 2^P-1
M=N
DO
IF M MOD 2 = 0 THEN M=M/2
LOOP UNTIL M MOD 2 = 1
IF M MOD 4 = 1 THEN D=1 ELSE D=-1
S=S+D
REM ***graphics***
IF D=1 THEN
XC=XB-YB+YA : YC=YB+XB-XA
ELSE
XC=XB+YB-YA : YC=YB-XB+XA
END IF
```

```
XT=C1*XA+C2*XB : YT=C1*YA+C2*YB
LINE (XS,YS)-(XT,YT)
XS=C2*XB+C1*XC : YS=C2*YB+C1*YC
LINE -(XS,YS)
XA=XB : YA=YB : XB=XC : YB=YC
NEXT N
LINE -(XC,YC) : A$=INPUT$(1)
END
```

H4

WIKKEL

```
REM ***wikkellijn van cirkel***
REM ***naam:WIKKEL***
SCREEN 12 : CLS : PI=4*ATN(1)
WINDOW (-12,-9)-(12,9)
A=1 'straal cirkel
CIRCLE (0,0),A : PSET (A,0)
FOR N=0 TO 100 : T=2*PI*N/80
X=A*(COS(T)+T*SIN(T)) : Y=A*(SIN(T)-T*COS(T))
LINE -(X,Y)
IF N MOD 10 = 0 THEN LINE (COS(T),SIN(T))-(X,Y)
NEXT N
PAINT (0,0) : A$=INPUT$(1)
END
```

ARCHI***

```
REM ***spiraal van Archimedes***
REM ***naam:ARCHI***
SCREEN 12 : CLS
WINDOW (-12,-9)-(12,9)
A=.1 : PSET (0,0)
FOR T=0 TO 60 STEP .04 : R=A*T
X=R*COS(T) : Y=R*SIN(T)
LINE -(X,Y)
NEXT T : A$=INPUT$(1)
END
```

LOGSPIRA

```
REM ***logarithmische spiraal***
REM ***naam:LOGSPIRA***
SCREEN 12 : CLS
WINDOW (-4,-3)-(4,3)
A=.1 : B=.1 'beginpunt en groeisnelheid
PSET (A,0)
FOR T=0 TO 35 STEP .04 : R=A*EXP(B*T)
X=R*COS(T) : Y=R*SIN(T)
LINE -(X,Y)
NEXT T : A$=INPUT$(1)
END
```

BOLSPIRA

```
REM ***bolspiraal***
REM ***naam:BOLSPIRA***
SCREEN 12 : CLS : PI=4*ATN(1)
WINDOW (-2,-1.5)-(2,1.5)
A=.2 'spiraalconstante
C=.9 'helling projectievlak
P=1/SQR(2) : Q=P*SQR(1-C*C) 'projectiegetallen
FOR N=-500 TO 500
S=N*PI/50 : T=ATN(A*S)
X=COS(S)*COS(T) : Y=SIN(S)*COS(T) : Z=-SIN(T)
U=P*(Y-X) : V=C*Z-Q*(X+Y)
IF N=-500 THEN PSET (U,V) ELSE LINE -(U,V)
NEXT N : A$=INPUT$(1)
END
```

WERVEL

```
REM ***draaiende en krimpende veelhoek***
REM ***naam:WERVEL***
SCREEN 12 : CLS : PI=4*ATN(1)
WINDOW (-1.6,-1.2)-(1.6,1.2)
P=4 : DIM X(P),Y(P) 'aantal zijden
B=.05 'rotatiehoek in radialen
A=PI*(1-2/P) : C=SIN(A)/(SIN(B)+SIN(A+B))
FOR K=0 TO P : T=(2*K+1)*PI/P
X(K)=SIN(T) : Y(K)=COS(T)
NEXT K
FOR N=1 TO 64 : PSET (X(0),Y(0))
FOR L=1 TO P : LINE -(X(L),Y(L))
NEXT L
FOR M=0 TO P : Z=X(M)
X(M)=(X(M)*COS(B)-Y(M)*SIN(B))*C
Y(M)=(Z*SIN(B)+Y(M)*COS(B))*C
NEXT M
NEXT N : A$=INPUT$(1)
END
```

PYTHB1

```
REM ***boom van Pythagoras***
REM ***naam:PYTHB1***
SCREEN 12 : CLS : PI=4*ATN(1)
WINDOW (-8,-4)-(8,8)
P=10 : DIM A(P) 'orde
X=0 : Y=0 : U=1 : V=1 : C=1/SQR(2)
FOR M=0 TO P
FOR N=2^M TO 2^(M+1)-1
L=N : H=1 : X=0 : Y=0 : F=0
FOR K=0 TO M-1
A(M-K)=L MOD 2 : L=INT(L/2)
NEXT K
X=0 : Y=0
FOR J=1 TO M
IF A(J)=0 THEN
X=X-H*(COS(F)+2*SIN(F))
Y=Y+H*(2*COS(F)-SIN(F))
F=F+PI/4 : H=C*H
ELSE
X=X+H*(COS(F)-2*SIN(F))
Y=Y+H*(2*COS(F)+SIN(F))
F=F-PI/4 : H=C*H
END IF
NEXT J
U=H*(COS(F)+SIN(F))
V=H*(COS(F)-SIN(F))
LINE (X-V,Y-U)-(X+U,Y-V) : LINE -(X+V,Y+U)
LINE -(X-U,Y+V) : LINE -(X-V,Y-U)
NEXT N
NEXT M : A$=INPUT$(1)
END
```

PYTHB2

```
REM ***scheve Pythagorasboom***
REM ***orde bepaald door drempelwaarde***
REM ***naam:PYTHB2***
SCREEN 12 : CLS : PI=4*ATN(1)
WINDOW (-2.5,-2)-(5.5,4)
EPS=.04 'drempelwaarde kleinste afmeting
P=32 : DIM XA(P),YA(P),XB(P),YB(P),S(P)
REM ***initialisatie***
H=PI/3 'scheefheid Pythagoras driehoek
A1=COS(H)*COS(H) : B1=SIN(H)*COS(H)
A2=SIN(H)*SIN(H) : B2=-B1
XA=0 : YA=-1 : XB=0 : YB=0 : G=0 : M=0
LINE (O,O)-(1,0) : LINE -(1,-1)
LINE -(0,-1) : LINE -(0,0)
DO WHILE M>=0
DIFF=ABS(XB-XA)+ABS(YB-YA)
IF G<P AND DIFF>EPS THEN
M=M+1 : G=G+1 : S(M)=G 'leg op stapel
GOSUB graphics
XA=XAN : YA=YAN : XB=XBN : YB=YBN
ELSE
XA=XA(M) : YA=YA(M) : XB=XB(M) : YB=YB(M)
G=S(M) : M=M-1 'haal van stapel
END IF
LOOP : A$=INPUT$(1)
END
graphics:
U=XB-XA : V=YB-YA
XAN=XB : YAN=YB
XBN=XB+A1*U-B1*V : YBN=YB+B1*U+A1*V
UN=XBN-XAN : VN=YBN-YAN
XCN=XBN+VN : YCN=YBN-UN
XDN=XAN+VN : YDN=YAN-UN
LINE (XAN,YAN)-(XBN,YBN) : LINE -(XCN,YCN)
LINE -(XDN,YDN) : LINE -(XAN,YAN)
XA(M)=XDN : YA(M)=YDN
XB(M)=XA(M)+A2*U-B2*V : YB(M)=YA(M)+B2*U+A2*V
UR=XB(M)-XA(M) : VR=YB(M)-YA(M)
XCR=XB(M)+VR : YCR=YB(M)-UR
XDR=XA(M)+VR : YDR=YA(M)-UR
LINE (XA(M),YA(M))-(XB(M),YB(M)) : LINE -(XCR,YCR)
LINE -(XDR,YDR) : LINE -(XA(M),YA(M))
RETURN
```

PYTHB3

```
REM ***alternerende Pythagoras boom***
REM ***orde bepaald door drempelwaarde***
REM ***versie met kleuren geel en groen***
REM ***naam:PYTHB3***
SCREEN 12 : CLS : PI=4*ATN(1)
WINDOW (-7,-2.5)-(7,8)
EPS=.02 'drempelwaarde kleinste afmeting
P=24 : DIM XA(P),YA(P),XB(P),YB(P),S(P)
REM ***initialisatie***
LINE (0,0)-(0,-1),14 : LINE -(1,-1),14 : LINE -(1,0),14
XA=0 : YA=0 : XB=1 : YB=0 : G=0 : M=0
DO WHILE M>=0
DIFF=ABS(XA-XB)+ABS(YA-YB)
IF G<P AND DIFF>EPS THEN
M=M+1 : G=G+1 : S(M)=G
GOSUB graphics
XA=XAN : YA=YAN : XB=XBN : YB=YBN
ELSE
XA=XA(M) : YA=YA(M) : XB=XB(M) : YB=YB(M)
G=S(M) : M=M-1
END IF
LOOP
END
graphics:
IF G MOD 3 = 1 THEN GOSUB data1 ELSE GOSUB data2
XAB=XB-XA : YAB=YB-YA
XP1=XB-(B+C)*XAB-(A+B)*YAB
YP1=YB+(A+B)*XAB-(B+C)*YAB
XP2=XA-B*XAB-A*YAB : YP2=YA+A*XAB-B*YAB
XP4=XA+(A+B)*XAB-(B+C)*YAB
YP4=YA+(B+C)*XAB+(A+B)*YAB
XP5=XP4+C*XAB+B*YAB : YP5=YP4-B*XAB+C*YAB
XAN=XP4 : YAN=YP4 : XBN=XP5 : YBN=YP5
XA(M)=XP2 : YA(M)=YP2 : XB(M)=XP1 : YB(M)=YP1
IF DIFF<.1 THEN COL=10 ELSE COL=14
LINE (XA,YA)-(XB,YB),COL
LINE -(XP1,YP1),COL : LINE -(XP2,YP2),COL
LINE -(XA,YA),COL : LINE -(XP4,YP4),COL
LINE -(XP5,YP5),COL : LINE -(XB,YB),COL
RETURN
data1:
F=PI/6 : A=COS(F)^2 : B=SIN(F)*COS(F) : C=SIN(F)^2
RETURN
data2:
F=PI/3 : A=COS(F)^2 : B=SIN(F)*COS(F) : C=SIN(F)^2
RETURN
```

PYTHT

```
REM ***kale Pythagorasboom***
REM ***orde bepaald door drempelwaarde***
REM ***naam:PYTHT***
SCREEN 12 : CLS : PI=4*ATN(1)
WINDOW (-2.4,-1.4)-(2.4,2.2)
EPS=.01 'drempelwaarde kleinste afmeting
P=32 : DIM XA(P),YA(P),XB(P),YB(P),S(P)
REM ***initialisatie***
ALFA=PI/3 : BETA=PI/3 'afbuiging links en rechts
CA=.7 : CB=.7 'verkorting links en rechts
A1=COS(ALFA) : B1=SIN(ALFA)
A2=COS(BETA) : B2=SIN(BETA)
XA=0 : YA=-1 : XB=0 : YB=0 : G=0 : M=0
LINE (O,-1)-(0,0)
DO WHILE M>=0
DIFF=ABS(XB-XA)+ABS(YB-YA)
IF G<P AND DIFF>EPS THEN
M=M+1 : G=G+1 : S(M)=G 'leg op stapel
GOSUB graphics
XA=XAN : YA=YAN : XB=XBN : YB=YBN
ELSE
XA=XA(M) : YA=YA(M) : XB=XB(M) : YB=YB(M)
G=S(M) : M=M-1 'haal van stapel
END IF
LOOP : A$=INPUT$(1)
END
graphics:
U=XB-XA : V=YB-YA
XAN=XB : YAN=YB
XBN=XB+CA*(A1*U-B1*V) : YBN=YB+CA*(B1*U+A1*V)
XA(M)=XB : YA(M)=YB
```

```
XB(M)=XB+CB*(A2*U+B2*V) : YB(M)=YB+CB*(-B2*U+A2*V)
LINE (XA,YA)-(XB,YB)
RETURN
```

BOOMM

```
REM ***boom van Mandelbrot, backtrack methode***
REM ***naam:BOOMM***
SCREEN 12 : CLS : PI=4*ATN(1)
WINDOW (-9.5,-3)-(10.5,12)
P=12 : DIM XA(P),YA(P),XB(P),YB(P),S(P),FLAG(P)
REM ***initialisatie***
A=3.98 : B=4.38
RL=.72 : RR=.67
XA=0 : YB=0 : XB=1 : YB=0 : F=1
G=0 : M=0
LINE (0,0)-(1,0)
REM ***hoofdlus***
DO WHILE M>=0
IF G<P THEN
M=M+1 : G=G+1
IF F=1 THEN GOSUB taklinks ELSE GOSUB takrechts
XA=XAN : YA=YAN : XB=XBN : YB=YBN
ELSE
XA=XA(M) : YA=YA(M)
XB=XB(M) : YB=YB(M)
F=FLAG(M) : G=S(M) : M=M-1  'haal van stapel
END IF
LOOP
A$=INPUT$(1)
END
taklinks:
U=XB-XA : V=YB-YA : F=2
XM=(XA+XB)/2 : YM=(YA+YB)/2
XAN=XA-A*V : YAN=YA+A*U
XBN=XA-(A+RL)*V : YBN=YA+(A+RL)*U
XC=XM-(A+RL)*V : YC=YM+(A+RL)*U
XD=XM-(B+RR)*V : YD=YM+(B+RR)*U
XA(M)=XB-(B+RR)*V : YA(M)=YB+(B+RR)*U
XB(M)=XB-B*V : YB(M)=YB+B*U : FLAG(M)=1
S(M)=G
GOSUB graphics
RETURN
takrechts:
U=XB-XA : V=YB-YA : F=2
XM=(XA+XB)/2 : YM=(YA+YB)/2
XAN=XA-B*V : YAN=YA+B*U
XBN=XA-(B+RR)*V : YBN=YA+(B+RR)*U
XC=XM-(B+RR)*V : YC=YM+(B+RR)*U
XD=XM-(A+RL)*V : YD=YM+(A+RL)*U
XA(M)=XB-(A+RL)*V : YA(M)=YB+(A+RL)*U
XB(M)=XB-A*V : YB(M)=YB+A*U : FLAG(M)=1
S(M)=G
GOSUB graphics
RETURN
graphics:
LINE (XA,YA)-(XAN,YAN)
LINE (XBN,YBN)-(XC,YC) : LINE -(XD,YD)
LINE -(XA(M),YA(M)) : LINE (XB(M),YB(M))-(XB,YB)
RETURN
```

STER

```
REM ***sterfractal***
REM ***naam:STER***
SCREEN 12 : CLS : PI=4*ATN(1)
WINDOW (-.5,-.8)-(1.5,.7)
V=4 : A=144 : R=.35 : P=5
A=A*PI/180
PSET (0,0) : X=0 : Y=0
FOR N=0 TO (V+1)*V^(P-1)-1
M=N : B=N*A : F=0
DO WHILE M MOD V=0 AND F<P-1
F=F+1 : M=INT(M/V)
LOOP
X=X+R^(P-F-1)*COS(B) : Y=Y+R^(P-F-1)*SIN(B)
LINE -(X,Y)
NEXT N : A$=INPUT$(1)
END
```

STOFB

```
REM ***stoffractal, bepaald door twee rotaties***
REM ***backtrack methode***
REM ***naam:STOFB***
SCREEN 12 : CLS
P=12 : DIM X(P),Y(P),S(P)
REM ***parameters***
A=0 : B=.7071 : C=.5 : D=-.5
WINDOW (-4,-2.5)-(4,3.5)
REM ***initialisatie***
X=2*A-1 : Y=2*B : M=0 : G=0
PSET (-1,0) : PSET (1,0) : PSET (X,Y)
DO
IF G<P THEN
M=M+1 : G=G+1 : GOSUB trafo
X=X1 : Y=Y1
X(M)=X2 : Y(M)=Y2 : S(M)=G  'leg op stapel
ELSE
X=X(M) : Y=Y(M) : G=S(M)  'haal van stapel
M=M-1
END IF
LOOP UNTIL M<0
A$=INPUT$(1)
END
trafo:
X1=A*X-B*Y-1+A : Y1=B*X+A*Y+B
X2=C*X-D*Y+1-C : Y2=D*X+C*Y-D
PSET (X1,Y1) : PSET (X2,Y2)
RETURN
```

STOFBT

```
REM ***stoffractal, bepaald door drie rotaties***
REM ***backtrack methode***
REM ***naam:STOFBT***
SCREEN 12 : CLS
P=8 : DIM XS(2*P),YS(2*P),S(2*P)
REM ***parameters***
A1=.43 : B1=.3 : A2=.43 : B2=.3 : A3=.43 : B3=.3
T1=.5 : T2=SQR(3)/2
E=T1*(1-A3)+T2*B3 : F=-T1*B3+T2*(1-A3)
WINDOW (-.8,-.6)-(1.6,1.2)
REM ***initialisatie***
```

```
X=T1 : Y=T2/3 'beginpunt
M=0 : G=0
PSET (0,0) : PSET (1,0) : PSET (T1,T2)
PSET (X,Y)
DO
IF G<P THEN
GOSUB trafo : G=G+1
X=X1 : Y=Y1
M=M+1 : XS(M)=X2 : YS(M)=Y2 : S(M)=G 'leg op stapel
M=M+1 : XS(M)=X3 : YS(M)=Y3 : S(M)=G 'leg op stapel
ELSE
X=XS(M) : Y=YS(M) : G=S(M) 'haal van stapel
M=M-1
END IF
LOOP UNTIL M<0
END
trafo:
X1=A1*X-B1*Y : Y1=B1*X+A1*Y
X2=A2*X-B2*Y+1-A2 : Y2=B2*X+A2*Y-B2
X3=A3*X-B3*Y+E : Y3=B3*X+A3*Y+F
PSET (X1,Y1) : PSET (X2,Y2) : PSET (X3,Y3)
RETURN
```

MONDRIAN

```
REM ***moderne kunst a la Mondrian***
REM ***naam:MONDRIAN***
SCREEN 12 : CLS
RANDOMIZE 11
WINDOW (-.3,-.1)-(1.3,1.1)
H=.1 'schaal parameter
REM ***lijst***
LINE (0,0)-(1,0) : LINE -(1,1)
LINE -(0,1) : LINE -(0,0)
REM ***graphics***
FOR N=1 TO 200
X=.1+.8*INT(100*RND)/100
Y=.1+.8*INT(100*RND)/100
K=H*(1-SQR(RND))
IF RND<.5 THEN
LINE (X-K,Y)-(X+K,Y)
ELSE
LINE (X,Y-K)-(X,Y+K)
END IF
NEXT N
A$=INPUT$(1)
END
```

STOF

```
REM ***stoffractal, Monte Carlo methode***
REM ***naam:STOF***
REM ***versie voor twee rotaties***
SCREEN 12 : CLS
PI=4*ATN(1) : RANDOMIZE 11
WINDOW (-1.5,-1.5)-(2.5,1.5)
REM ***parameters***
R1=.63 : A=R1*COS(2*PI/3) : B=R1*SIN(2*PI/3)
R2=.63 : C=R2*COS(2*PI/3) : D=-R2*SIN(2*PI/3)
Q=R1*R1/(R1*R1+R2*R2) 'kansdrempel
KMAX=20000
X=A : Y=B 'beginpunt
REM ***hoofdlus***
FOR K=1 TO KMAX
IF INKEY$<>"" THEN END
IF RND<Q THEN
Z=X : X=A*X-B*Y : Y=B*Z+A*Y
ELSE
Z=X : X=C*X-D*Y+1-C : Y=D*Z+C*Y-D
END IF
PSET (X,Y)
NEXT K : A$=INPUT$(1)
END
```

PYTHBS

```
REM ***Pythagorasboom met toevallige storingen***
REM ***naam:PYTHBS***
SCREEN 12 : CLS : PI=4*ATN(1)
WINDOW (-9.5,-3)-(10.5,12)
P=10 : DIM XA(P),YA(P),XB(P),YB(P),S(P)
REM ***initialisatie***
AL0=3 : AR0=3.1 : AM0=3.5 : B0=.51 : RANDOMIZE 11
XA=0 : YA=0 : XB=1 : YB=0 : G=0 : M=0
W=.05 'intensiteit van storing
LINE (O,O)-(1,0)
DO WHILE M>=0
IF G<P THEN
M=M+1 : G=G+1 : S(M)=G 'leg op stapel
GOSUB graphics
XA=XAN : YA=YAN : XB=XBN : YB=YBN
ELSE
XA=XA(M) : YA=YA(M) : XB=XB(M) : YB=YB(M)
G=S(M) : M=M-1 'haal van stapel
END IF
LOOP : A$=INPUT$(1)
END
graphics:
AL=AL0*(1+(RND-.5)*W) : AR=AR0*(1+(RND-.5)*W)
AM=AM0*(1+(RND-.5)*W) : B=B0*(1+(RND-.5)*W)
U=XB-XA : V=YB-YA
XM=(1-B)*XA+B*XB : YM=(1-B)*YA+B*YB
XAN=XA-AL*V : YAN=YA+AL*U
XBN=XM-AM*V : YBN=YM+AM*U
XCN=XB-AR*V : YCN=YB+AR*U
LINE (XA,YA)-(XAN,YAN) : LINE (XB,YB)-(XCN,YCN)
XA(M)=XBN : YA(M)=YBN
XB(M)=XCN : YB(M)=YCN
RETURN
```

BROWNL

```
REM ***Brownse lijn***
REM ***naam:BROWNL***
SCREEN 12 : CLS
RANDOMIZE TIMER
WINDOW (-1.2,-.9)-(1.2,.9)
W=40 : Y=0
LINE (1,0)-(-1,0)
FOR K=0 TO 2000
X=-1+K/1000 : Y=Y+W*(RND-.5)/2000
LINE -(X,Y)
NEXT K : A$=INPUT$(1)
END
```

COLLET

```
REM ***bifurcatie diagram van x'=a x(1-x)) volgens Collet***
REM ***naam:COLLET***
SCREEN 12 : YM=240
F1=2*YM-80 : F2=F1-40
A1=2.9 : A2=4 'grenzen bifurcatieinterval
REM ***hoofdprogramma***
FOR N=0 TO 600
IF INKEY$<>"" THEN END
A=A1+N*(A2-A1)/600 : X=.5
FOR K=1 TO 400
X=A*X*(1-X)
IF K>200 THEN PSET(20+N,F1-F2*X)
NEXT K
NEXT N
END
```

HENON

```
REM ***banen van Henon's quadratisch systeem***
REM ***banen door toeval gekozen
REM ***naam:HENON***
SCREEN 12 : CLS : RANDOMIZE 11
WINDOW (-1.2,-.9)-(1.2,.9)
A=.24 : B=SQR(1-A*A) : M=0
DO WHILE INKEY$="" AND M<32
X=-.4+RND : Y=-.4+RND
FOR N=1 TO 1000 : PSET (X,Y)
Z=X : X=X*A-(Y-X*X)*B
Y=Z*B+(Y-Z*Z)*A
IF ABS(X)+ABS(Y)>10 THEN EXIT FOR
NEXT N
M=M+1
LOOP : A$=INPUT$(1)
END
```

MIRA

```
REM ***banen van Mira's algemeen systeem***
REM ***naam:MIRA***
SCREEN 12 : CLS
WINDOW (-16,-12)-(16,12)
REM ***parameters***
A=-.48 : B=.93 : C=2-2*A : D=20
X=4 : Y=0 'beginpunt
REM ***hoofdlus***
W=A*X+C*X*X/(1+X*X)
FOR N=0 TO 40000
Z=X : X=B*Y+W : U=X*X
W=A*X+C*U/(1+U) : Y=W-Z
IF N>16 THEN PSET (X,Y)
NEXT N : A$=INPUT$(1)
END
```

JULIAB

```
REM ***Julia fractal van z'=z*z+c ***
REM ***backtrack methode***
REM ***naam:JULIAB***
SCREEN 12 : CLS
WINDOW (-2,-1.5)-(2,1.5)
P=15 : DIM X(P),Y(P),S(P)
REM ***data Julia set***
A=0 : B=-1 'parameters
A1=1/8-A/2 : B1=-B/2 : R1=SQR(A1*A1+B1*B1)
XD=.5+SQR(R1+A1) : YD=SQR(R1-A1)
IF B>0 THEN YD=-YD 'afstotend dekpunt
REM ***initialisatie***
X=-XD : Y=-YD : M=0 : G=0
PSET (XD,YD) : PSET (X,Y)
DO WHILE INKEY$=""
IF G<P THEN
M=M+1 : G=G+1 : GOSUB trafo
X=X1 : Y=Y1
X(M)=X2 : Y(M)=Y2 : S(M)=G 'leg op stapel
ELSE
X=X(M) : Y=Y(M) : G=S(M) 'haal van stapel
M=M-1
END IF
LOOP UNTIL M<0
A$=INPUT$(1)
END
trafo:
X0=(X-A)/2 : Y0=(Y-B)/2 : R=SQR(X0*X0+Y0*Y0)
X1=-SQR(R+X0) : Y1=-SQR(R-X0)
IF Y0<0 THEN Y1=-Y1
X2=-X1 : Y2=-Y1
PSET (X1,Y1) : PSET (X2,Y2)
RETURN
```

JULIAMC

```
REM ***Julia set van z:=z^2+c, Monte Carlo methode***
REM ***naam:JULIAMC***
SCREEN 12 : CLS : RANDOMIZE 11
WINDOW (-2,-1.5)-(2,1.5)
A=-.9 : B=0 'parameters Julia set
X=RND : Y=RND
FOR K=0 TO 10000
X1=(X-A)/2 : Y1=(Y-B)/2 : S=SQR(X1*X1+Y1*Y1)
IF RND<.5 THEN
X=SQR(S+X1) : Y=SQR(S-X1)
IF Y1<0 THEN Y=-Y
ELSE
X=-SQR(S+X1) : Y=-SQR(S-X1)
IF Y1<0 THEN Y=-Y
END IF
IF K>10 THEN PSET (X,Y) : PSET (-X,-Y)
IF K>10 AND B=0 THEN PSET (X,-Y) : PSET (-X,Y)
NEXT K : A$=INPUT$(1)
END
```

JULIAP

```
REM ***Julia fractal van z:=z*z+c, pixelmethode***
REM ***naam:JULIAP***
SCREEN 12 : CLS
A=-.55 : B=0 'parameters Julia set
DELH=1.6 : DELV=1.2
N1=300 : N2=INT(N1*DELV/DELH)
IF B=0 THEN N3=0 ELSE N3=-N2
XM=320 : YM=240
REM ***hoofdprogramma***
FOR I=0 TO N1 : FOR J=N3 TO N2
```

```
IF INKEY$<>"" THEN END
I1=XM+I : I2=XM-I : X=I*DELH/N1
J1=YM-J : J2=YM+J : Y=J*DELV/N2
FOR K=1 TO 80
X1=X*X-Y*Y+A : Y1=2*X*Y+B
S=X*X+Y*Y : S1=(X-X1)*(X-X1)+(Y-Y1)*(Y-Y1)
IF S>1000 THEN GOTO repeat
IF S1<.0001 THEN GOTO putpixel
X=X1 : Y=Y1
NEXT K
putpixel:
L=1+K MOD 14
PSET (I1,J1),L : PSET (I2,J2),L
IF B=0 THEN PSET (I1,J2),L : PSET (I2,J1),L
repeat:
NEXT J : NEXT I : A$=INPUT$(1)
END
```

MANDEL

```
REM ***totaalbeeld van de Mandelbrot set***
REM ***monochroom versie***
REM ***naam:MANDEL***
SCREEN 12 : CLS
XM=320 : YM=240
DELH=1.76 : DELV=1.32 : AC=-.65
N1=300 : N2=INT(N1*DELV/DELH)
REM ***hoofdlus***
FOR I=-N1 TO N1 : A=AC+I*DELH/N1
FOR J=0 TO N2 : B=J*DELV/N2
U=4*(A*A+B*B) : V=U-2*A+1/4
IF U+8*A+15/4<0 THEN L=0 : GOTO repeat
IF V-SQR(V)+2*A-1/2<0 THEN L=0 : GOTO repeat
X=A : Y=B : K=0
DO
Z=X : X=X*X-Y*Y+A : Y=2*Z*Y+B
S=X*X+Y*Y : K=K+1
LOOP UNTIL S>100 OR K=50
IF K MOD 2=1 THEN PSET (XM+I,YM-J) : PSET (XM+I,YM+J)
repeat:
IF INKEY$<>"" THEN END
NEXT J
NEXT I : A$=INPUT$(1)
END
```

H8

WOLK

```
REM ***banen van een dynamisch systeem***
REM ***naam:WOLK***
SCREEN 12 : CLS
WINDOW (-120,-90)-(120,90)
A=3.5 : B=-3
X=3.21 : Y=6.54
REM ***hoofdprogramma***
DEF FNS(X)
IF X>1 THEN
FNS=A*X+B*(X-1)
ELSEIF X<-1 THEN
FNS=A*X+B*(X+1)
ELSE
FNS=A*X
END IF
END DEF
FOR N=1 TO 10000
PSET (X,Y)
Z=X : X=Y+FNS(X)
Y=-Z+FNS(X)
NEXT N
A$=INPUT$(1)
END
```

WOLK1

```
REM ***banen van een dynamisch systeem***
REM ***naam:WOLK1***
SCREEN 12 : CLS
WINDOW (-40,-30)-(40,30)
DIM X(7),Y(7),P(7)
A=-.5 : B=2 'parameterwaarden
REM ***data***
DATA 2,0,400,4,0,800,8,0,1600,10,0,2000
DATA 12,0,2400,14,0,2800,16,0,3200
FOR I=1 TO 7 : READ X(I),Y(I),P(I) : NEXT I
REM ***hoofdprogramma***
DEF FNS(X)= X*(A+B)/(1+ABS(X))
FOR K=1 TO 7
X=X(K) : Y=Y(K) : P=P(K)
FOR N=1 TO P(K)
PSET (X,Y)
Z=X : X=Y+FNS(X)
Y=-Z+FNS(X)
NEXT N
NEXT K
A$=INPUT$(1)
END
```

WOLK2

```
REM ***banen van een dynamisch systeem***
REM ***naam:WOLK2***
SCREEN 12 : CLS
WINDOW (-8,-6)-(8,6)
A=.51 : B=-.49 : C=.9995 'parameterwaarden
X=4 : Y=1
REM ***hoofdprogramma***
DEF FNS(X)
IF X>0 THEN FNS=A*X ELSE FNS=B*X
END DEF
FOR N=1 TO 5000
PSET (X,Y)
Z=X : X=C*Y+FNS(X)
Y=-Z+FNS(X)
NEXT N
A$=INPUT$(1)
END
```

KRONKELT

```
REM ***kronkellijn, talstelselmethode, Koch kruis***
REM ***naam:KRONKELT***
SCREEN 12 : CLS : PI=4*ATN(1)
WINDOW (-2.4,-1.8)-(2.4,1.8)
P=4 : DIM T(P) 'orde
U=4 : DIM A(U),B(U) 'aantal elementen beginlijn
REM ***beginlijn, vectoren in lengte en richting in graden***
```

```
DATA 2,0,2,90,2,180,2,-90
X=-1 : Y=-1 'beginpunt
FOR I=0 TO U-1
READ A(I),B(I) : B(I)=B(I)*PI/180
NEXT I
V=4 : DIM L(V),F(V) 'aantal elementen motief
REM ***motief, vectoren in lengte en richting in graden***
DATA 1,0,1,60,1,-60,1,0
FOR I=0 TO V-1
READ L(I),F(I) : F(I)=F(I)*PI/180
NEXT I
S=0
FOR I=0 TO V-1 : S=S+L(I)*COS(F(I)) : NEXT I
FOR I=0 TO V-1 : L(I)=L(I)/S : NEXT I
PSET (X,Y)
FOR K=0 TO U-1
REM ***hoofdcyclus***
FOR N=0 TO V^P-1
M=N
FOR J=0 TO P-1
T(J)=M MOD V : M=M\V
NEXT J
L=A(K) : F=B(K)
FOR J=0 TO P-1
L=L*L(T(J)) : F=F+F(T(J))
NEXT J
X=X+L*COS(F) : Y=Y+L*SIN(F)
LINE -(X,Y)
NEXT N
NEXT K
END
```

KRONKELB

```
REM ***kronkellijn***
REM ***naam:KRONKELB***
SCREEN 12 : CLS
WINDOW (-2.4,-1.8)-(2.4,1.8)
ORDE=6
U=4 'aantal elementen beginlijn
V=4 'aantal elementen motief
PI=4*ATN(1) : SMAX=((V-1)*ORDE)
DIM P(SMAX),Q(SMAX),N(SMAX)
REM ***data vectoren beginlijn, absolute lengte en graden***
DATA 2,90,2,0,2,-90,2,180
FOR I=1 TO U : READ FB(I),AB(I)
AB(I)=AB(I)*PI/180 : NEXT I
REM ***data vectoren motief, relatieve lengte en graden***
DATA 1,0,1,60,1,-60,1,0
FOR I=1 TO V : READ FM(I),AM(I)
AM(I)=AM(I)*PI/180 : NEXT I
SOM=0 : FOR I=1 TO V
SOM=SOM+FM(I)*COS(AM(I)) : NEXT I
FOR I=1 TO V : FM(I)=FM(I)/SOM : NEXT I
REM ***beginpunt***
X=-1 : Y=-1 : PSET(X,Y)
REM ***hoofdprogramma***
FOR J=1 TO U
P(1)=FB(J) : Q(1)=AB(J)
S=1 : N=0 : N(1)=0
DO WHILE S>0
F=P(S) : PHI=Q(S) : N=N(S) : S=S-1
IF N<ORDE THEN
FOR I=0 TO V-1
S=S+1 : P(S)=F*FM(V-I)
Q(S)=PHI+AM(V-I) : N(S)=N+1
NEXT I
ELSE
GOSUB graphics
END IF
LOOP
NEXT J
END
graphics:
X=X+F*COS(PHI) : Y=Y+F*SIN(PHI)
LINE -(X,Y)
RETURN
```

De schelp op p. 50 komt uit de verzameling van Polders Beeldbank Amsterdam en twee houtsneden op p. 58 zijn van de M. C. Eschers Heirs c/o Cordon Art, Baarn. De rest van de illustraties zijn van de hand van de auteur.

De fractals zijn voor het boek gefotografeerd vanaf het beeldscherm of vervaardigd met een grafische plotter of laserprinter.

J. Gleick, *Chaos. De derde wetenschappelijke revolutie*. Contact, 1988 (vertaling van *Chaos. A new science*. Viking, 1987).
Dit boek beschrijft de ontwikkelingen in de chaostheorie.
H. A. Lauwerier, *Analyse met de microcomputer*. Epsilon Uitgaven, 1987.
H. A. Lauwerier, *Meetkunde met de microcomputer*. Epsilon Uitgaven, 1987.
Deze deeltjes zijn gericht op schoolgebruik. Veel aandacht is besteed aan het maken van grafische voorstellingen, het tekenen van vlakke figuren en projecties van ruimtelijke lichamen. Er zijn in totaal negentig computerprogramma's. Het tweede deel sluit af met een hoofdstuk over de vierde dimensie.
H. A. Lauwerier, *Symmetrie. Regelmatige structuren in de kunst*. Aramith Uitgevers, 1988.
H. A. Lauwerier, *Een wereld van fractals*. Aramith Uitgevers, 1990.
Dit boek is een uitbreiding van *Fractals*. De nieuwste ontwikkelingen op het gebied van fractals worden beschreven.
B. B. Mandelbrot, *The fractal geometry of nature*. Freeman, 1983.
Een essay met het accent op het herhalingsprincipe, echter weinig systematisch. Wel voorzien van veel plaatjes.
H.-O. Peitgen & P. H. Richter, *The beauty of fractals*. Springer, 1986.
Aantrekkelijk door de vele kleurenillustraties. Gericht op de fractals van Julia en Mandelbrot. Bevat moeilijke wiskunde.
H. G. Schuster, *Deterministic chaos, an introduction*. Physik-Verlag, 1984.
Algemene inleiding tot het toeval in fractals, dynamische systemen en de fractals van Julia en Mandelbrot. Voor bèta-gericht publiek. Bevat wiskunde, maar met weinig diepgang. Sluit aan op de hoofdstukken 6 en 7 van dit boek.
H. Tennekes e.a., *De vlinder van Lorenz. De verrassende dynamica van chaos*. Aramith Uitgevers, 1990.
Het eerste oorspronkelijk Nederlandse boek over chaos.

Het is mogelijk om de computerprogramma's uit dit boek op een 3.5″ diskette te krijgen. De programma's van dit boek zijn daarbij aangevuld met enkele verwante programma's van fractals. De floppy is verkrijgbaar door overmaking van f 25,- op Postbanknummer 58266 ten name van uitgeverij Gottmer / Becht / Aramith te Bloemendaal onder vermelding van 'diskette fractals 5de druk'.

Een aan de eisen van de tijd aangepaste nieuwe druk van het meest succesvolle boek over fractals. Het boek om mee te beginnen, vooral voor degenen die over een MS-DOS computer beschikken waarbij QBasic de nieuwe en betere programmeertaal is. Alle programma's zijn daartoe herschreven en met een nieuwe typografie beter leesbaar geworden.
Fractals, aldus gedoopt door de wiskundige B.B. Mandelbrot, werden aanvankelijk door de wetenschap nog met enige aarzeling ontvangen, maar genieten nu wijd en zijd toepassing. Het zijn grillige meetkundige figuren met een ingebouwde zelfgelijkvormigheid. Wat men ziet is de herhaling van hetzelfde patroon op steeds kleinere schaal. Behangselpapier dat er eender uitziet ongeacht van welke afstand men het bekijkt.
Fractals zou men ook objecten van kunst, van 'computer art' kunnen noemen. Met de in dit boek gegeven theorie en gebruik makend van een van de vele programma's kan de lezer zelf creatief te werk gaan. Met wat eigen fantasie kan hij aldus decoratieve meetkundige figuren ontwerpen die in de toegepaste kunst mogelijk een plaats kunnen vinden.
Voor het begrijpen van de tekst is maar weinig wiskundige kennis nodig. Wat er aan wiskundige techniek nodig is heeft in hoofdzaak betrekking op de wiskundige achtergrond van de gebruikte programma's. Dat betreft vooral de meetkundige gelijkvormigheid, de herhaalbaarheid, en in het bijzonder de wijze van recursie, de techniek van backtracking.

Hans Lauwerier is emeritus hoogleraar in de toegepaste en zuivere wiskunde. Hij heeft in binnen- en buitenland grote bekendheid opgebouwd met boeken als Symmetrie, Oneindigheid en De wereld van fractals.

ISBN 90-6834-115-4

9 789068 341157

Aramith Uitgevers